УНИВЕРСИТЕТ „ПРОФ. Д-Р АСЕН ЗЛАТАРОВ“

Изследване на индексираните матрици и техните приложения

Стела Димитрова Тодорова

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за присъждане на образователна и научна степен
„доктор” по научна
специалност „Компютърни системи и технологии”

Област на висшето образование 5. Технически науки
Професионално направление 5.3. Комуникационна и компютърна техника

Научни ръководители:
доц. д-р Веселина Бурева
доц. д-р Нора Ангелова

Бургас, 2024

Дисертационният труд е обсъден и допуснат до защита на заседание на катедра “Компютърни системи и технологии”, проведено на 14.06.2024 г. в Университет “Проф. д-р Асен Златаров”-Бургас.

Дисертационният труд съдържа 113 страници, от които 32 фигури и 1 таблица. Използвани са 213 литературни източници. Резултатите са публикувани в 5 статии.

Обща характеристика на дисертационния труд

Актуалност на проблема

През 1984 Красимир Атанасов дефинира понятието инексирана матрица. Индексирана матрица(ИМ) наричаме обекта

$$A = [K, L, a_{k_i,l_j}],$$

където множествата K и L удовлетворяват условието K, L $\subset \mathcal{I}$ и $\mathcal{I}$ е фиксирано множество от индекси и са в сила всички операции върху множества. Елементите на една ИМ могат да бъдат: реални числа, елементи на множеството $\{0, 1\}$, предикати, съждения, интуиционистки размити двойки, функции и др. През годините са дефинирани операции върху две индексирани матрици: събиране, почленно умножение, разлика, умножение. Тези операции за означени съответно $\oplus_{(\circ)}$, $\otimes_{(\circ)}$, $\odot_{(\circ,*)}$.

В зависимост от типа на елементите се определят подоперациите, които ще се изпълняват над елементите на индексираните матрици. За ИМ, чиито елементи принадлежат на множеството на реалните числа $\mathcal{R}$ относно операция $\circ$ и $e_\circ$ е единичният елемент на $\mathcal{R}$ относно операция $\circ$, тогава когато $\circ \in \{+, -\}$ и $e_\circ$ е “0 а когато $\circ \in \{\times, :\}$, тогава $e_\circ$ е “1". Когато елементите са предикати, тогава $\circ, * \in \{\vee, \wedge\}$, а когато елементите са интуиционистки размити двойки, тогава $\circ, * \in \{\max, \min\}$.

Съгласно дефинициите на операциите върху множества и приложение на дефинираните операции върху две индексирани матрици $A = [K, L, \{a_{k_i,l_j}\}]$ и $B = [P, Q, \{b_{p_r,q_s}\}]$, в резултат на което се получава нова индексирана матрица $C = [T, V, \{c_{t_u,v_w}\}]$, може да се определи колко елемента от индексните множества на първата ИМ A съвпадат с елементи от индексните множества на втората ИМ B и стойността на елемента c_{t_u,v_w}. Например за операция събиране, ако $K \cap P \neq \emptyset$ и $L \cap Q \neq \emptyset$, тогава $t_u = k_i = p_r \in K \cap P$, $v_w = l_j = q_s \in L \cap Q$ и може да се изпълни подоперацията върху елементите на ИМ C на съвпадащите индекси по ред и по стълб. Аналогично, ако разликата $K - P \neq \emptyset$ и $\exists l_j \in L$ и също така ако е изпълнено $L - Q \neq \emptyset$ и $\exists k_i \in K$, тогава елементът на ИМ C c_{t_u,v_w} става равен на елементът от първата индексирана матрица a_{k_i,l_j}. Така с операциите върху множества се дефинират и може да се изследват условията за извършване на подоперациите между елементите на две индексирани матрици за различните операции.

Решаването на матрични уравнения има приложение в електротехника и електрониката. Тогава може да се изследвата условията за съществуване на решение на матрични уравнения с индексирани матрици.

С детерминанта на индексирана матрица може да се представи блок-схема в комбинаторния смисъл на това понятие и може да се намери уравнение на права, минаваща през две точки.

Теорията на графите имат широко приложение в комуникационната и компютърна техника. Представяне на графи с индексирани матрици определят други условия, според които се съставя една ИМ.

Агрегиращите операции върху индексирани матрици намират приложение при намиране на минимално, максимално разстояние и сума от разстоянията между контактните точки на елементите, от които са съставени логическите схеми и са изследвани с таблица на Ексел.

Цел и задачи на дисертационния труд

Цели и задачи на настоящата научна дисертация са: 1) Цел на настоящата научна дисертация е да се намери решение на матрични уравнения съставени от индексирани матрици, чиито елементи са реални числа и интуиционистки размити двойки.

2) Друга задача е да се изследват свойствата на детерминанта и пермунента на индексирани матрици.

3) Представяне на функционално-конструктивни модули с индексирани матрици.

4) Представяне на монтажните места на функционално-конструктивни модули с индексирани матрици.

5) Изследване на случайни процеси с индексирани матрици.

6) Приложение на индексирани матрици с програмата Ексел.

7) Представяне на логически стойности зададени от изводи на Ардуино контролер, конфигурирани като изходи, с индексирана матрица.

Изказвам голямата си благодарност към ръководителите на дисертационния ми труд доц. д-р Веселина Бурева и доц. д-р Нора Ангелова за знанията, помощта, възможностите и контактите, които ми предоставиха.

Благодаря и на всички колеги от катедра „Компютърни системи и технологии” при Университет „Проф.д-р А.Златаров”, Институт по биофизика и биомедицинско инженерство, секция Биоинформатика и математическо моделиране, БАН и Институт по информационни и комуникационни технологии, секция Интелигентни системи, БАН за подкрепата и съдействието.

Глава 1. Въведение в теорията на индексираните матрици

Красимир Атанасов дава идея за понятието за Индексирана Матрица (ИМ) през 1984 година. През 2014 той описва в детайли ИМ, разглеждайки случаите на ИМ, чиито елементи са реални числа, елементи на множеството $\{0, 1\}$; съждения; предикати; интуиционистки размити двойки и други, както и дефиниции за операции, релации и оператори върху съответния вид ИМ. Нека $\mathcal{I}$ е фиксирано множество от индекси и $\mathcal{R}$ е множество от реални числа.

Нека множествата K, L удовлетворяват условието K, L $\subset \mathcal{I}$.

Индексирана матрица с индексни множества K и L, където K, L $\subset \mathcal{I}$ ще наричаме обекта:

$$A = [K, L, \{a_{k_i,l_j}\}] = \begin{array}{c|cccc} & l_1 & l_2 & \dots & l_n \\ \hline k_1 & a_{k_1,l_1} & a_{k_1,l_2} & \dots & a_{k_1,l_n} \\ k_2 & a_{k_2,l_1} & a_{k_2,l_2} & \dots & a_{k_2,l_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_m & a_{k_m,l_1} & a_{k_m,l_2} & \dots & a_{k_m,l_n} \end{array}$$

където K $= \{k_1, k_2, ..., k_m\}$, L $= \{l_1, l_2, ..., l_n\}$, и за $1 \leq$ i $\leq$ m, $1 \leq$ j $\leq$ n: $a_{k_i,l_j} \in \mathcal{R}$, където $\mathcal{R}$ е множество на реалните числа.

Нека са дадени две индексирани матрици $A = [K, L, \{a_{k_i,l_j}\}]$ and $B = [P, Q, \{b_{p_r,q_s}\}]$, чиито елементи принадлежат на множеството на реалните числа.

За двете ИМ $A = [K, L, \{a_{k_i,l_j}\}]$ и $B = [P, Q, \{b_{p_r,q_s}\}]$ са дефинирани разширения на стандартните матрични операции „събиране“ и „умножение на две матрици“ „умножение на матрица и реално число“. Тези операции са означени с: $\oplus_{(\circ)}$, $\otimes_{(\circ)}$, $\odot_{(\circ,*)}$, където $\circ, * : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ са подоперациите, които ще се изпълняват над елементите на A и B. Тези операции имат следния вид.

Събиране

$$A \oplus_{(\circ)} B = [K \cup P, L \cup Q, \{c_{t_u,v_w}\}],$$

където

$$c_{t_u,v_w} = \begin{cases} a_{k_i,l_j}, & \text{ако } t_u = k_i \in K \text{ и } v_w = l_j \in L - Q \\ & \text{или } t_u = k_i \in K - P \text{ и } v_w = l_j \in L; \\ \\ b_{p_r,q_s}, & \text{ако } t_u = p_r \in P \text{ и } v_w = q_s \in Q - L \\ & \text{или } t_u = p_r \in P - K \text{ и } v_w = q_s \in Q; \\ \\ a_{k_i,l_j} \circ b_{p_r,q_s}, & \text{ако } t_u = k_i = p_r \in K \cap P \\ & \text{и } v_w = l_j = q_s \in L \cap Q \\ \\ e_\circ, & \text{в противен случай,} \end{cases},$$

където $e_\circ$ е единичният елемент на $\mathcal{R}$ относно операция $\circ$. Например, тук и по-надолу ако $\mathcal{R}$ е множеството на реалните числа и $\circ \in \{+, -\}$, тогава $e_\circ$ е “0 а когато $\circ \in \{\times, :\}$, тогава $e_\circ$ е “1".

Почленно умножение

$$A \otimes_{(\circ)} B = [K \cap P, L \cap Q, \{c_{t_u,v_w}\}],$$

където за $t_u = k_i = p_r \in K \cap P$ и $v_w = l_j = q_s \in L \cap Q$

$$c_{t_u,v_w} = a_{k_i,l_j} \circ b_{p_r,q_s},$$

Умножение

$$A \odot_{(\circ,*)} B = [K \cap (P - L), Q \cap (L - P), \{c_{t_u,v_w}\}],$$

където

$$c_{t_u,v_w} = \begin{cases} a_{k_i,l_j}, & \text{ако } t_u = k_i \in K \text{ и } v_w = l_j \in L - P - Q \\ b_{p_r,q_s}, & \text{ако } t_u = p_r \in P - L - K \text{ и } v_w = q_s \in Q \\ \underset{l_j = p_r \in L \cap P}{\circ}(a_{k_i,l_j} * b_{p_r,q_s}), & \text{ако } t_u = k_i \in K \text{ и } v_w = l_j \in Q \\ e_\circ, & \text{в противен случай,} \end{cases}.$$

Описани са и други операции над ИМ, например:

Изваждане

$$A \ominus B = [K - P, L - Q, \{c_{t_u,v_w}\}],$$

където "–" е операция изваждане на множества и

$$c_{t_u,v_w} = a_{k_i,l_j}, \text{ за } t_u = k_i \in K - P \text{ и } v_w = l_j \in L - Q.$$

Нека имаме индексираната матрица А, чиито елементи са реални числа, а $k_0 \notin K$ и $l_0 \notin L$ да бъдат два индекса. К. Атанасов, Евдокия Сотирова и Веселина Бурева въвеждат осем агрегиращи операции, които приложени върху A имат следния вид.

Агрегиране за максимална стойност по редове $\rho_{\max}(A, k_0)$

$$\rho_{\max}(A, k_0) = \begin{array}{c|cccc} & l_1 & l_2 & \dots & l_n \\ \hline k_0 & \max\limits_{1 \le i \le m} a_{k_i,l_1} & \max\limits_{1 \le i \le m} a_{k_i,l_2} & \dots & \max\limits_{1 \le i \le m} a_{k_i,l_n} \end{array}$$

Агрегиране за минимална стойност по редове $\rho_{\min}(A, k_0)$
$\rho_{\min}(A, k_0)$

$$\rho_{\min}(A, k_0) = \begin{array}{c|cccc} & l_1 & l_2 & \dots & l_n \\ \hline k_0 & \min\limits_{1 \le i \le m} a_{k_i,l_1} & \min\limits_{1 \le i \le m} a_{k_i,l_2} & \dots & \min\limits_{1 \le i \le m} a_{k_i,l_n} \end{array}$$

Агрегиране за сума по редове $\rho_{sum}(A, k_0)$

$$\rho_{sum}(A, k_0) = \begin{array}{c|cccc} & l_1 & l_2 & \dots & l_n \\ \hline k_0 & \sum\limits_{\substack{i=1 \\ 1 \le i \le m}}^{n} a_{k_i,l_1} & \sum\limits_{\substack{i=1 \\ 1 \le i \le m}}^{n} a_{k_i,l_2} & \dots & \sum\limits_{\substack{i=1 \\ 1 \le i \le m}}^{n} a_{k_i,l_n} \end{array}$$

Агрегиране за средноаритметична стойност по редове $\rho_{ave}(A, k_0)$

$$\rho_{ave}(A, k_0) = \begin{array}{c|cccc} & l_1 & l_2 & \dots & l_n \\ \hline k_0 & \frac{1}{m} \sum\limits_{\substack{i=1 \\ 1 \le i \le m}}^{n} a_{k_i,l_1} & \frac{1}{m} \sum\limits_{\substack{i=1 \\ 1 \le i \le m}}^{n} a_{k_i,l_2} & \dots & \frac{1}{m} \sum\limits_{\substack{i=1 \\ 1 \le i \le m}}^{n} a_{k_i,l_n} \end{array}$$

Агрегиране за максимална стойност по колони $\sigma_{\max}(A, l_0)$

$$\sigma_{\max}(A, l_0) = \begin{array}{c|c} & l_0 \\ \hline k_1 & \max\limits_{1 \le j \le n} a_{k_1, l_j} \\ \vdots & \vdots \\ k_m & \max\limits_{1 \le j \le n} a_{k_m, l_j} \end{array}$$

Агрегиране за минимална стойност по колони $\sigma_{\min}(A, l_0)$

$$\sigma_{\min}(A, l_0) = \begin{array}{c|c} & l_0 \\ \hline k_1 & \min\limits_{1 \le j \le n} a_{k_1, l_j} \\ \vdots & \vdots \\ k_m & \min\limits_{1 \le j \le n} a_{k_m, l_j} \end{array}$$

Агрегиране за сума по колони $\sigma_{sum}(A, l_0)$

$$\sigma_{sum}(A, l_0) = \begin{array}{c|c} & l_0 \\ \hline k_1 & \sum\limits_{\substack{j=1 \\ 1 \le j \le n}}^{n} a_{k_1, l_j} \\ \vdots & \vdots \\ k_m & \sum\limits_{\substack{j=1 \\ 1 \le j \le n}}^{n} a_{k_m, l_j} \end{array}$$

Агрегиране за средноаритметична стойност по колони $\sigma_{ave}(A, l_0)$

$$\sigma_{ave}(A, l_0) = \begin{array}{c|c} & l_0 \\ \hline k_1 & \frac{1}{n} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ 1 \le j \le n}}^{n} a_{k_1, l_j} \\ \vdots & \vdots \\ k_m & \frac{1}{n} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ 1 \le j \le n}}^{n} a_{k_m, l_j} \end{array}$$

Дадени са дефиниции за релации между две индексирани матрици $A = [K, L, a_{k_i,l_j}]$ и $B = [P, Q, b_{p_r,q_s}]$. С "$\subset$"и "$\subseteq$"се означават релациите „строго включване“ и „слабо включване“.

Строгата релация „включване относно размерност“ е

$$A \subset_d B, (((K \subset P) \& (L \subset Q)) \vee$$

$$((K \subseteq P) \& (L \subset Q)) \vee ((K \subset P) \& (L \subseteq Q))) \& (\forall k \in K)(\forall l \in L)(a_{k_i,l_j} = b_{p_r,q_s}).$$

Нестрогата релация „включване относно размерност“ е

$$A \subseteq_d B, (K \subseteq_d P) \& (L \subseteq_d Q) \& (\forall k \in K)(\forall l \in L)(a_{k_i,l_j} = b_{p_r,q_s}).$$

Нека x е променлива, получаваща (краен брой) стойности $\mathrm{E} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и *p(x)*$\}$ е предикат с променлива x. Нека V е оценъчна функция, дефинирана чрез

$$V(p(x)) = \langle \mu(p(x)), \nu(p(x)) \rangle,$$

където $\mu(p(x))$ и $\nu(p(x))$ са степените на вярност и невярност на p.

Интуиционистки размитите интерпретации на (интуиционистки размитите) кванторите „за всяко“ ($\forall$) и „съществува“ ($\exists$) са въведени от К. Атанасов и Георги Гаргов чрез:

$$V(\exists x p(x)) = \langle \max_{y\in E} \mu(p(y)), \min_{y\in E} \nu(p(y))\rangle,$$

$$V(\forall x p(x)) = \langle \min_{y\in E} \mu(p(y)), \max_{y\in E} \nu(p(y))\rangle.$$

Нека елементите $\{a_{k_i,l_j}\}$ и $\{b_{p_r,q_s}\}$ на индексирани матрици $A = [K, L, \{a_{k_i,l_j}\}]$ и $B = [P, Q, \{b_{p_r,q_s}\}]$ са предикати. Тогава операции $\circ, * \in \{\vee, \wedge\}$.

За двете индексирани матрици A и B са дефинирани следните операции:

Събиране

$$A \oplus_{(\circ)} B = [K \cup P, L \cup Q, \{c_{t_u,v_w}\}],$$

където

$$c_{t_u,v_w} = \begin{cases} a_{k_i,l_j}, & \text{ако } t_u = k_i \in K \text{ и } v_w = l_j \in L - Q \\ & \text{или } t_u = k_i \in K - P \text{ и } v_w = l_j \in L; \\ \\ b_{p_r,q_s}, & \text{ако } t_u = p_r \in P \text{ и } v_w = q_s \in Q - L \\ & \text{или } t_u = p_r \in P - K \text{ и } v_w = q_s \in Q; \\ \\ a_{k_i,l_j} \circ b_{p_r,q_s}, & \text{ако } t_u = k_i = p_r \in K \cap P \\ & \text{и } v_w = l_j = q_s \in L \cap Q \\ \\ false, & \text{в противен случай,} \end{cases}.$$

Почленно умножение

$$A \otimes_{(\circ)} B = [K \cap P, L \cap Q, \{c_{t_u,v_w}\}],$$

където за $t_u = k_i = p_r \in K \cap P$ и $v_w = l_j = q_s \in L \cap Q$

$$c_{t_u,v_w} = a_{k_i,l_j} \circ b_{p_r,q_s},$$

Умножение

$$A \odot_{(\circ,*)} B = [K \cap (P - L), Q \cap (L - P), \{c_{t_u,v_w}\}],$$

където

$$c_{t_u,v_w} = \begin{cases} a_{k_i,l_j}, & \text{ако } t_u = k_i \in K \text{ и } v_w = l_j \in L - P - Q \\ \\ b_{p_r,q_s}, & \text{ако } t_u = p_r \in P - L - K \text{ и } v_w = q_s \in Q \\ \\ \underset{l_j = p_r \in L \cap P}{\circ}(a_{k_i,l_j} * b_{p_r,q_s}), & \text{ако } t_u = k_i \in K \text{ и } v_w = l_j \in Q \\ \\ false, & \text{в противен случай,} \end{cases}.$$

Нека елементите $\{a_{k_i,l_j}\}$ и $\{b_{p_r,q_s}\}$ на индексирани матрици $A = [K, L, \{a_{k_i,l_j}\}]$ и $B = [P, Q, \{b_{p_r,q_s}\}]$ принадлежат на множеството $\{0, 1\}$. Тогава $\circ, * \in \{\min, \max\}$. За двете индексирани матрици A и B може да се дефинират следните операции: $\oplus_{(\circ)}$, $\otimes_{(\circ)}$, $\ominus_{(\circ)}$, където $\circ, * \in \{\min, \max\}$.

Събиране

$$A \oplus_{(\circ)} B = [K \cup P, L \cup Q, \{c_{t_u,v_w}\}],$$

където

$$c_{t_u,v_w} = \begin{cases} a_{k_i,l_j}, & \text{ако } t_u = k_i \in K \text{ и } v_w = l_j \in L - Q \\ & \text{или } t_u = k_i \in K - P \text{ и } v_w = l_j \in L; \\ \\ b_{p_r,q_s}, & \text{ако } t_u = p_r \in P \text{ и } v_w = q_s \in Q - L \\ & \text{или } t_u = p_r \in P - K \text{ и } v_w = q_s \in Q; \\ \\ a_{k_i,l_j} \circ b_{p_r,q_s}, & \text{ако } t_u = k_i = p_r \in K \cap P \\ & \text{и } v_w = l_j = q_s \in L \cap Q \\ \\ 0, & \text{в противен случай,} \end{cases}.$$

Почленно умножение

$$A \otimes_{(\circ)} B = [K \cap P, L \cap Q, \{c_{t_u,v_w}\}],$$

където за $t_u = k_i = p_r \in K \cap P$ и $v_w = l_j = q_s \in L \cap Q$

$$c_{t_u,v_w} = a_{k_i,l_j} \circ b_{p_r,q_s},$$

Умножение

$$A \odot_{(\circ,*)} B = [K \cap (P - L), Q \cap (L - P), \{c_{t_u,v_w}\}],$$

където

$$c_{t_u,v_w} = \begin{cases} a_{k_i,l_j}, & \text{ако } t_u = k_i \in K \text{ и } v_w = l_j \in L - P - Q \\ \\ b_{p_r,q_s}, & \text{ако } t_u = p_r \in P - L - K \text{ и } v_w = q_s \in Q \\ \\ \underset{l_j = p_r \in L \cap P}{\circ}(a_{k_i,l_j} * b_{p_r,q_s}), & \text{ако } t_u = k_i \in K \text{ и } v_w = l_j \in Q \\ \\ 0, & \text{в противен случай,} \end{cases}.$$

Нека V е оценъчна функция, която на съждение (предикат) p задава вярностната му стойност във вида $V(p) = \langle \mu(p), \nu(p) \rangle$. Тази двойка стойности се нарича ИРД. За всеки две ИРД можем да дефинираме операции $\neg$, &, $\vee$ чрез:

$$V(\neg p) = \langle \mu(p), \nu(p) \rangle,$$

$$V(p \wedge q) = \langle \min(\mu(p), \mu(q)), \max(\nu(p), \nu(q)) \rangle,$$
$$V(p \vee q) = \langle \max(\mu(p), \mu(q)), \min(\nu(p), \nu(q)) \rangle.$$

ИРД $V(p)$ е тавтология, ако $\mu(p) = 1$, $\nu(p) = 0$ и интуиционистки размита тавтология, ако $\mu(p) \geq \nu(p)$.

Нека

$$e_\vee = \langle 0, 1 \rangle$$

и

$$e_\wedge = \langle 1, 0 \rangle.$$

Нека са дадени две ИМ $A = [K, L, \{a_{k_i,l_j}\}]$ и $B = [P, Q, \{b_{p_r,q_s}\}]$, чиито елементи са ИРД, където

$$a_{k_i,l_j} = \langle \alpha_{k_i,l_j}, \beta_{k_i,l_j} \rangle,$$
$$b_{p_r,q_s} = \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s} \rangle.$$

Сега операциите за $\circ, * \in \{\max, \min\}$ са:

Събиране

$$A \oplus_{\vee} B = [K \cup P, L \cup Q, \langle \varphi_{t_u,v_w}, \psi_{t_u,v_w} \rangle]$$

$$\langle \varphi_{t_u,v_w}, \psi_{t_u,v_w} \rangle = \begin{cases} \langle \alpha_{k_i,l_j}, \beta_{k_i,l_j} \rangle, & \text{ако } t_u = k_i \in K \\ & \text{и } v_w = l_j \in L - Q \\ & \text{или } t_u = k_i \in K - P \\ & \text{и } v_w = l_j \in L \\ \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s} \rangle, & \text{ако } t_u = p_r \in P \\ & \text{и } v_w = q_s \in Q - L \\ & \text{или } t_u = p_r \in P - K \\ & \text{и } v_w = q_s \in Q \\ \langle \max(\alpha_{k_i,l_j}, \gamma_{k_i,l_j}), & \text{ако } t_u = k_i = p_r \in K \cap P \\ \quad \min(\beta_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s}) \rangle, & \text{и } v_w = l_j = q_s \in L \cap Q \\ e_{\vee}, & \text{в противен случай} \end{cases},$$

и

$$A \oplus_{\wedge} B = [K \cup P, L \cup Q, \langle \varphi_{t_u,v_w}, \psi_{t_u,v_w} \rangle]$$

$$\langle \varphi_{t_u,v_w}, \psi_{t_u,v_w} \rangle = \begin{cases} \langle \alpha_{k_i,l_j}, \beta_{k_i,l_j} \rangle, & \text{ако } t_u = k_i \in K \\ & \text{и } v_w = l_j \in L - Q \\ & \text{или } t_u = k_i \in K - P \\ & \text{и } v_w = l_j \in L \\ \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s} \rangle, & \text{ако } t_u = p_r \in P \\ & \text{и } v_w = q_s \in Q - L \\ & \text{или } t_u = p_r \in P - K \\ & \text{и } v_w = q_s \in Q \\ \langle \min(\alpha_{k_i,l_j}, \gamma_{k_i,l_j}), & \text{ако } t_u = k_i = p_r \in K \cap P \\ \quad \max(\beta_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s}) \rangle, & \text{и } v_w = l_j = q_s \in L \cap Q \\ e_{\wedge}, & \text{в противен случай} \end{cases},$$

Почленно умножение

$$A \otimes_{(\wedge)} B = [K \cap P, L \cap Q, \langle \varphi_{t_u,v_w}, \psi_{t_u,v_w} \rangle],$$

където

$$\langle \varphi_{t_u,v_w}, \psi_{t_u,v_w} \rangle = \begin{cases} \langle \min(\alpha_{k_i,l_j}, \gamma_{k_i,l_j}) & \text{ако } t_u = k_i = p_r \in K \cap P \\ \quad \max(\beta_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s}) \rangle, & \text{и } v_w = l_j = q_s \in L \cap Q \end{cases},$$

и

$$A \otimes_{(\vee)} B = [K \cap P, L \cap Q, \langle \varphi_{t_u,v_w}, \psi_{t_u,v_w} \rangle],$$

където

$$\langle \varphi_{t_u,v_w}, \psi_{t_u,v_w}\rangle \ = \begin{cases} \langle \max(\alpha_{k_i,l_j}, \gamma_{k_i,l_j}) & \text{ако } t_u = k_i = p_r \in K \cap P \\ \quad \min(\beta_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s})\rangle, & \text{и } v_w = l_j = q_s \in L \cap Q \end{cases},$$

Умножение, където например при $\circ = \vee$ и $* = \wedge$

$$A \odot_{(\circ,*)} B = [K \cap (P - L), Q \cap (L - P), \langle \varphi_{t_u,v_w}, \psi_{t_u,v_w}\rangle],$$

където

$$\langle \varphi_{t_u,v_w}, \psi_{t_u,v_w}\rangle = \begin{cases} \langle \alpha_{k_i,l_j}, \beta_{k_i,l_j}\rangle, & \text{ако } t_u = k_i \in K \text{ и } v_w = l_j \in L - P \\ \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s}\rangle, & \text{ако } t_u = p_r \in P - L \text{ и } v_w = q_s \in Q \\ \langle \max\limits_{l_j = p_r \in L \cap P}(\min(\alpha_{k_i,l_j}, \gamma_{k_i,l_j})), & \text{ако } t_u = k_i \in K \text{ и } v_w = l_j \in Q \\ \quad \min\limits_{l_j = p_r \in L \cap P} \max(\beta_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s})\rangle, & \\ e_\vee, & \text{в противен случай,} \end{cases}.$$

К. Атанасов, Е. Сотирова, В. Бурева и Антъни Шенън дефинират времева интуиционистка размита ИМ във вида:

$$A(\mathcal{T}) \equiv \begin{array}{c|cccc} & l_1 & l_2 & \dots & l_n \\ \hline k_1 & \langle \mu_{k_1,l_1,\tau}, \nu_{k_1,l_1,\tau}\rangle & \langle \mu_{k_1,l_2,\tau}, \nu_{k_1,l_2,\tau}\rangle & \dots & \langle \mu_{k_1,l_n,\tau}, \nu_{k_1,l_n,\tau}\rangle \\ k_2 & \langle \mu_{k_2,l_1,\tau}, \nu_{k_2,l_1,\tau}\rangle & \langle \mu_{k_2,l_2,\tau}, \nu_{k_2,l_2,\tau}\rangle & \dots & \langle \mu_{k_2,l_n,\tau}, \nu_{k_2,l_n,\tau}\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_m & \langle \mu_{k_m,l_1,\tau}, \nu_{k_m,l_1,\tau}\rangle & \langle \mu_{k_m,l_2,\tau}, \nu_{k_m,l_2,\tau}\rangle & \dots & \langle \mu_{k_m,l_n,\tau}, \nu_{k_m,l_n,\tau}\rangle \end{array}$$

където за всяко $\tau \in \mathcal{T}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n : \mu_{k_i,l_j,\tau}, \nu_{k_i,l_j,\tau}, \mu_{k_i,l_j,\tau} + \nu_{k_i,l_j,\tau} \in [0,1]$. Тук $\mathcal{T}$ е времена скала, а τ е неин елемент, т.е. момент във времето.

През 2014 К. Атанасов дава дефиниция за Разширена интуиционистка размита ИМ. Също така въвежда понятието за ИМ, чиито елементи са функции.

Нека означим множеството от всички използвани функции с $\mathcal{F}$.

Изследването на ИМ с функционален тип елементи има два случая:
1) всяка функция от множеството $\mathcal{F}$ има един аргумент и той е точно x (т.е. не е възможно една от функциите да има аргумент x и друга функция да има аргумент y) – нека означим множеството от тези функции с $\mathcal{F}_x^1$.
2) Всяка функция от множество $\mathcal{F}$ има един аргумент, но този аргумент може да бъде различен за различните функции или различните функции на множеството $\mathcal{F}$ може да имат различен брой аргументи.

ИМ, чиито елементи са функции ще наричаме обекта

$$[K, L, f_{k_i,l_j}] \equiv \begin{array}{c|cccc} & l_1 & l_2 & \dots & l_n \\ \hline k_1 & f_{k_1,l_1} & f_{k_1,l_2} & \dots & f_{k_1,l_n} \\ k_2 & f_{k_2,l_1} & f_{k_2,l_2} & \dots & f_{k_2,l_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_m & f_{k_m,l_1} & f_{k_m,l_2} & \dots & f_{k_m,l_n} \end{array},$$

където K $= \{k_1, k_2, ..., k_m\}$, L $= \{l_1, l_2, ..., l_n\}$, и за $1 \le$ i $\le$ m, $1 \le$ j $\le$ n: $f_{k_i,l_j} \in \mathcal{F}_x^1$.

Нека са дадени две ИМ $A = [K, L, \{f_{k_i,l_j}\}]$ и $B = [P, Q, \{g_{p_r,q_s}\}]$, чиито елементи са функции. Операциите над тях имат следния вид:

Събиране

$$A \oplus_{(\circ)} B = [K \cup P, L \cup Q, \{h_{t_u,v_w}\}],$$

където

$$h_{t_u,v_w} = \begin{cases} f_{k_i,l_j}, & \text{ако } t_u = k_i \in K \text{ и } v_w = l_j \in L - Q \\ & \text{или } t_u = k_i \in K - P \text{ и } v_w = l_j \in L; \\ \\ g_{p_r,q_s}, & \text{ако } t_u = p_r \in P \text{ и } v_w = q_s \in Q - L \\ & \text{или } t_u = p_r \in P - K \text{ и } v_w = q_s \in Q; \\ \\ f_{k_i,l_j} \circ g_{p_r,q_s}, & \text{ако } t_u = k_i = p_r \in K \cap P \\ & \text{и } v_w = l_j = q_s \in L \cap Q \\ \\ \perp, & \text{в противен случай,} \end{cases},$$

където $\perp$ означава липса на операция на определено място и $\circ \in \{+, \times, \max, \min, \dots\}$.

Почленно умножение

$$A \otimes_{(\circ)} B = [K \cap P, L \cap Q, \{h_{t_u,v_w}\}],$$

където за $t_u = k_i = p_r \in K \cap P$ и $v_w = l_j = q_s \in L \cap Q$

$$h_{t_u,v_w} = f_{k_i,l_j} \circ g_{p_r,q_s},$$

Умножение

$$A \odot_{(\circ,*)} B = [K \cap (P - L), Q \cap (L - P), \{h_{t_u,v_w}\}],$$

където

$$h_{t_u,v_w} = \begin{cases} g_{k_i,l_j}, & \text{ако } t_u = k_i \in K \text{ и } v_w = l_j \in L - P - Q \\ \\ g_{p_r,q_s}, & \text{ако } t_u = p_r \in P - L - K \text{ и } v_w = q_s \in Q \\ \\ \underset{l_j = p_r \in L \cap P}{\circ} (a_{k_i,l_j} * b_{p_r,q_s}), & \text{ако } t_u = k_i \in K \text{ и } v_w = l_j \in Q \\ \\ \perp, & \text{в противен случай,} \end{cases},$$

където $\circ \in \{(+, \times), (\max, \min), (\min, \max), \dots\}$.

К. Атанасов и Таня Пенчева дават дефиниция за Декартово произведение върху ИМ, чиито елементи са ИРД.

Нека са дадени две индексирани матрици $A = [K, L, a_{k_i,l_j}]$ и $B = [P, Q, b_{p_r,q_s}]$, където a_{k_i,l_j} and b_{p_r,q_s} са ИРД или реални числа.

Първият вид Декартово произведение е следният:

$$A \times_C B = [K \times P, L \times Q, c_{\langle k_i,p_r \rangle, \langle l_j,q_s \rangle}],$$

където

$$c_{\langle \langle k_i,p_r \rangle, \langle l_j,q_s \rangle \rangle} = \langle a_{k_i,l_j}, b_{p_r,q_s} \rangle$$

и операцията $\times$ между K и P, и между L и Q е стандартното Декартово произведение на множества.
Нека за три елементи $a, b, c \in \mathcal{X}$ са верни следните равенства
$\langle\langle a, b\rangle, c\rangle = \langle a, b, c\rangle = \langle a, \langle b, c\rangle\rangle$.

Когато ИМ A и B имат за елементи ИРД, тогава елементите на ИМ $A \times_C B$ ще имат вида

$$c_{\langle\langle k_i, p_r\rangle, \langle l_j, q_s\rangle\rangle} = \langle a_{k_i, l_j}, b_{p_r, q_s}\rangle = \langle\langle \mu_{k_i, l_j}, \nu_{k_i, l_s j}\rangle, \langle \varphi_{p_r, q_s}, \psi_{p_r, q_s}\rangle\rangle,$$

т.е., двойка от ИРД.

Нека $(\circ, *) \in \{(\max, \min), (\min, \max), (+, .), (., +), (@, @)\}$ и нека за две интуиционистки размити двойки $\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle$:

$$\langle a, b\rangle(\circ, *)\langle c, d\rangle = \langle a \circ c, b * d\rangle.$$

Вторият вид Декартово произведение е следното

$$A \times_{(\circ, *)} B = [K \times P, L \times Q, c_{\langle\langle k_i, p_r\rangle, \langle l_j, q_s\rangle\rangle}],$$

където

$$c_{\langle\langle k_i, p_r\rangle, \langle l_j, q_s\rangle\rangle} = (\circ, *)\langle a_{k_i, l_j}, b_{p_r, q_s}\rangle$$

и за променливите t, u, v, w, в някои случаи (напр. конюнкция или дизюнкция)

$$(\circ, *)\langle\langle t, u\rangle, \langle v, w\rangle\rangle = \langle \circ(t, v), *(u, w)\rangle$$

и в други (напр. импликация)

$$(\circ, *)\langle\langle t, u\rangle, \langle v, w\rangle\rangle = \langle \circ(u, v), *(t, w)\rangle$$

по отношение на вида на операцията, която двойката $(\circ, *)$ представлява. Тогава, когато

$$a_{k_i, l_j} = \langle \mu_{k_i, l_j}, \nu_{k_i, l_s j}\rangle,$$
$$b_{p_r, q_s} = \langle \varphi_{p_r, q_s}, \psi_{p_r, q_s}\rangle,$$

както по-горе, в някои случаи (т.е. конюнкция или дизюнкция) имаме

$$c_{\langle\langle k_i, p_r\rangle, \langle l_j, q_s\rangle\rangle} = \langle \circ(\mu_{k_i, l_j}, \varphi_{p_r, q_s}), *(\nu_{k_i, l_s j}, \psi_{p_r, q_s})\rangle$$

а в други (напр. импликация)

$$c_{\langle\langle k_i, p_r\rangle, \langle l_j, q_s\rangle\rangle} = \langle \circ(\nu_{k_i, l_j}, \psi_{p_r, q_s}), *(\mu_{k_i, l_s j}, \varphi_{p_r, q_s})\rangle.$$

Също така е дадена дефиниция за разширена интуиционистка размита ИМ. Там са дадени дефиниции за операции върху две разширени индексирани матрици, чиито елементи са интуиционистки размити двойки, също така са дадени дефиниции за агрегации и оператори. За две $A = [K^*, L^*, \langle \mu_{k_i, l_j}, \nu_{k_i, l_j}\rangle] B = [P^*, Q^*, \langle \rho_{p_r, q_s}, \sigma_{p_r, q_s}\rangle]$, чиито елементи са интуиционистки размити двойки, може да дефинираме матрични операции $\oplus_{(\max, \min)}$, $\oplus_{(\min, \max)}$, $\otimes_{(\max, \min)}$, $\otimes_{(\min, \max)}$, $\odot_{(\circ, *)}$ аналогично на индексираните матрици, чиито елементи са интуиционистки размити двойки:
Събиране-$(\max, \min)$

$$A \oplus_{(\max, \min)} B = [T^*, V^*, \{\langle \varphi_{t_u, v_w}, \psi_{t_u, v_w}\rangle\}],$$

където

$$T^* = K^* \cup P^* = \{\langle t_u, \alpha_u^t, \beta_u^t\rangle | t_u \in K \cup P\},$$

$$V^* = L^* \cup Q^* = \{\langle v_w, \alpha_w^v, \beta_w^v\rangle | v_w \in L \cup Q\},$$

$$\alpha_u^t = \begin{cases} \alpha_i^k, & \text{ако } t_u \in K - P \\ \alpha_r^p, & \text{ако } t_u \in P - K \\ \max(\alpha_i^k, \alpha_r^p), & \text{ако } t_u \in K \cap P \end{cases},$$

$$\beta_w^v = \begin{cases} \beta_j^l, & \text{ако } v_w \in L - Q \\ \beta_s^q, & \text{ако } v_w \in Q - L \\ \min(\beta_j^l, \beta_s^q), & \text{ако } v_w \in L \cap Q \end{cases},$$

и

$$\langle \varphi_{t_u,v_w}, \psi_{t_u,v_w}\rangle = \begin{cases} \langle \mu_{k_i,l_j}, \nu_{k_i,l_j}\rangle, & \text{ако } t_u = k_i \in K \\ & \text{и } v_w = l_j \in L - Q \\ & \text{или } t_u = k_i \in K - P \\ & \text{и } v_w = l_j \in L \\ \langle \rho_{p_r,q_s}, \sigma_{p_r,q_s}\rangle, & \text{ако } t_u = p_r \in P \\ & \text{и } v_w = q_s \in Q - L \\ & \text{или } t_u = p_r \in P - K \\ & \text{и } v_w = q_s \in Q \\ \langle \max(\mu_{k_i,l_j}, \rho_{k_i,l_j}), & \text{ако } t_u = k_i = p_r \in K \cap P \\ \quad \min(\nu_{p_r,q_s}, \sigma_{p_r,q_s})\rangle, & \text{и } v_w = l_j = q_s \in L \cap Q \\ \langle 1, 0\rangle, & \text{в противен случай} \end{cases},$$

Събиране-$(\min, \max)$

$$A \oplus_{(\min,\max)} B = [T^*, V^*, \{\langle \varphi_{t_u,v_w}, \psi_{t_u,v_w}\rangle\}],$$

където

$$T^* = K^* \cup P^* = \{\langle t_u, \alpha_u^t, \beta_u^t\rangle | t_u \in K \cup P\},$$

$$V^* = L^* \cup Q^* = \{\langle v_w, \alpha_w^v, \beta_w^v\rangle | v_w \in L \cup Q\},$$

$$\alpha_u^t = \begin{cases} \alpha_i^k, & \text{ако } t_u \in K - P \\ \alpha_r^p, & \text{ако } t_u \in P - K \\ \max(\alpha_i^k, \alpha_r^p), & \text{ако } t_u \in K \cap P \end{cases},$$

$$\beta_w^v = \begin{cases} \beta_j^l, & \text{ако } v_w \in L - Q \\ \beta_s^q, & \text{ако } v_w \in Q - L \\ \min(\beta_j^l, \beta_s^q), & \text{ако } v_w \in L \cap Q \end{cases},$$

и

$$\langle \varphi_{t_u,v_w}, \psi_{t_u,v_w}\rangle = \begin{cases} \langle \mu_{k_i,l_j}, \nu_{k_i,l_j}\rangle, & \text{ако } t_u = k_i \in K \\ & \text{и } v_w = l_j \in L - Q \\ & \text{или } t_u = k_i \in K - P \\ & \text{и } v_w = l_j \in L \\ \langle \rho_{p_r,q_s}, \sigma_{p_r,q_s}\rangle, & \text{ако } t_u = p_r \in P \\ & \text{и } v_w = q_s \in Q - L \\ & \text{или } t_u = p_r \in P - K \\ & \text{и } v_w = q_s \in Q \\ \langle \min(\mu_{k_i,l_j}, \rho_{k_i,l_j}), & \text{ако } t_u = k_i = p_r \in K \cap P \\ \quad \max(\nu_{p_r,q_s}, \sigma_{p_r,q_s})\rangle, & \text{и } v_w = l_j = q_s \in L \cap Q \\ \langle 1, 0\rangle, & \text{в противен случай} \end{cases},$$

Умножение-$(\max, \min)$

$$A \odot_{(\max,\min)} B = [T^*, V^*, \{\langle \varphi_{t_u,v_w}, \psi_{t_u,v_w} \rangle\}],$$

където

$$T^* = [K \cap (P - L)]^* = \{\langle t_u, \alpha_u^t, \beta_u^t \rangle | t_u \in K \cap (P - L)\},$$

$$V^* = (Q \cap (L - P))^* = \{\langle v_w, \alpha_w^v, \beta_w^v \rangle | v_w \in Q \cap (L - P)\},$$

$$\alpha_u^t = \begin{cases} \alpha_i^k, & \text{ако } t_u \in K \\ \alpha_r^p, & \text{ако } t_u \in P - L \end{cases},$$

$$\beta_w^v = \begin{cases} \beta_j^l, & \text{ако } v_w \in L - P \\ \beta_s^q, & \text{ако } v_w \in Q \end{cases},$$

и

$$\langle \varphi_{t_u,v_w}, \psi_{t_u,v_w} \rangle = \begin{cases} \langle \mu_{k_i,l_j}, \nu_{k_i,l_j} \rangle, & \text{ако } t_u = k_i \in K \\ & \text{ и } v_w = l_j \in L - P - Q \\ \langle \varphi_{p_r,q_s}, \psi_{p_r,q_s} \rangle, & \text{ако } t_u = p_r \in P - L - K \\ & \text{ и } v_w = q_s \in Q \\ \langle \max\limits_{l_j = p_r \in L \cap P} \min(\mu_{k_i,l_j}, \varphi_{k_i,l_j}), & \text{ако } t_u = k_i \in K \\ & \text{ и } v_w = l_j \in Q \\ \quad \min\limits_{l_j = p_r \in L \cap P} \max(\nu_{p_r,q_s}, \psi_{p_r,q_s}) \rangle, & \\ \langle 0, 1 \rangle, & \text{в противен случай,} \end{cases}.$$

Умножение-$(\min, \max)$

$$A \odot_{(\max,\min)} B = [T^*, V^*, \{\langle \varphi_{t_u,v_w}, \psi_{t_u,v_w} \rangle\}],$$

където

$$T^* = (K \cap (P - L))^* = \{\langle t_u, \alpha_u^t, \beta_u^t \rangle | t_u \in K \cap (P - L)\},$$

$$V^* = (Q \cap (L - P))^* = \{\langle v_w, \alpha_w^v, \beta_w^v \rangle | v_w \in Q \cap (L - P)\},$$

$$\alpha_u^t = \begin{cases} \alpha_i^k, & \text{ако } t_u \in K \\ \alpha_r^p, & \text{ако } t_u \in P - L \end{cases},$$

$$\beta_w^v = \begin{cases} \beta_j^l, & \text{ако } v_w \in L - P \\ \beta_s^q, & \text{ако } v_w \in Q \end{cases}$$

и

$$\langle \varphi_{t_u,v_w}, \psi_{t_u,v_w} \rangle = \begin{cases} \langle \mu_{k_i,l_j}, \nu_{k_i,l_j} \rangle, & \text{ако } t_u = k_i \in K \\ & \text{ и } v_w = l_j \in L - P - Q \\ \langle \varphi_{p_r,q_s}, \psi_{p_r,q_s} \rangle, & \text{ако } t_u = p_r \in P - L - K \\ & \text{ и } v_w = q_s \in Q \\ \langle \max\limits_{l_j = p_r \in L \cap P} (\min(\mu_{k_i,l_j}, \varphi_{k_i,l_j})), & \text{ако } t_u = k_i \in K \\ & \text{ и } v_w = l_j \in Q \\ \quad \min\limits_{l_j = p_r \in L \cap P} \max(\nu_{p_r,q_s}, \psi_{p_r,q_s}) \rangle, & \\ \langle 0, 1 \rangle, & \text{в противен случай,} \end{cases}.$$

К. Атанасов дава дефиниции за разширена интуиционистка размита ИМ с интервални стойрости и за времева разширена интуиционистка размита ИМ:

$$A^*(\mathcal{T}) \equiv$$

$$\begin{array}{l|cccc} & l_1, \langle \alpha_1^l, \beta_1^l, \tau \rangle & l_2, \langle \alpha_2^l, \beta_2^l, \tau \rangle & \dots & l_n, \langle \alpha_n^l, \beta_n^l, \tau \rangle \\ \hline k_1, \langle \alpha_1^k, \beta_1^k, \tau \rangle & \langle \mu_{k_1,l_1}, \nu_{k_1,l_1}, \tau \rangle & \langle \mu_{k_1,l_2}, \nu_{k_1,l_2}, \tau \rangle & \dots & \langle \mu_{k_1,l_n}, \nu_{k_1,l_n}, \tau \rangle \\ k_2, \langle \alpha_2^k, \beta_2^k, \tau \rangle & \langle \mu_{k_2,l_1}, \nu_{k_2,l_1}, \tau \rangle & \langle \mu_{k_2,l_2}, \nu_{k_2,l_2}, \tau \rangle & \dots & \langle \mu_{k_2,l_n}, \nu_{k_2,l_n}, \tau \rangle | \tau \in \mathcal{T}, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_m, \langle \alpha_m^k, \beta_m^k, \tau \rangle & \langle \mu_{k_m,l_1}, \nu_{k_m,l_1}, \tau \rangle & \langle \mu_{k_m,l_2}, \nu_{k_m,l_2}, \tau \rangle & \dots & \langle \mu_{k_m,l_n}, \nu_{k_m,l_n}, \tau \rangle \end{array}$$

където за $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n :$

$$\mu_{k_i,l_j,\tau}, \nu_{k_i,l_j,\tau}, \mu_{k_i,l_j,\tau} + \nu_{k_i,l_j,\tau} \in [0,1],$$

$$\alpha_{i,\tau}^k, \beta_{i,\tau}^k, \alpha_{i,\tau}^k + \beta_{i,\tau}^k \in [0,1],$$

$$\alpha_{j,\tau}^l, \beta_{j,\tau}^l, \alpha_{j,\tau}^l + \beta_{j,\tau}^l \in [0,1],$$

където

$$K^* = \{\langle k_i, \alpha_{i,\tau}^k, \beta_{i,\tau}^k \rangle | k_i \in K \& \tau \in \mathcal{T}\} = \{\langle k_i, \alpha_{i,\tau}^k, \beta_{i,\tau}^k \rangle | 1 \leq i \leq m \& \tau \in \mathcal{T}\},$$

$$L^* = \{\langle l_j, \alpha_{j,\tau}^l, \beta_{j,\tau}^l \rangle | l_j \in L \& \tau \in \mathcal{T}\} = \{\langle l_j, \alpha_{j,\tau}^l, \beta_{j,\tau}^l \rangle | 1 \leq j \leq n \& \tau \in \mathcal{T}\}.$$

Също така К. Атанасов дава дефиниция за тримерна ИМ:

$$[K, L, H, a_{k_i,l_j,h_g}] = \left\{ \begin{array}{l|cccc} & l_1 & l_2 & \dots & l_n \\ \hline k_1 & a_{k_1,l_1,h_g} & a_{k_1,l_2,h_g} & \dots & a_{k_1,l_n,h_g} \\ k_2 & a_{k_2,l_1,h_g} & a_{k_2,l_2,h_g} & \dots & a_{k_2,l_n,h_g} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_m & a_{k_m,l_1,h_g} & a_{k_m,l_2,h_g} & \dots & a_{k_m,l_n,h_g} \end{array} | h_g \in H \right\},$$

където

$K = k_1, k_2, ..., k_m, L = l_1, l_2, ..., l_n, H = h_1, h_2, ..., h_f$

и за $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq g \leq \mu : a_{k_i,l_j,h_g} \in \mathcal{X}$.

0.1 Глава 2. Нови резултати в теорията на индексираните матрици

0.1.1 Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици, чиито елементи са реални числа

Нека са дадени две индексирани матрици $A = [K, L, a_{k_i,l_j}]$ и $B = [P, Q, b_{p_r,q_s}]$, чиито елементи са реални числа и $e_\circ$ е единичният елемент на R. Ще разгледаме случая, когато елементите на индексираните матрици са реални числа и $\circ \in \{+, -\}$, където $e_\circ$ е "0" и когато $\circ \in \{\times, :\}$, тогава $e_\circ$ е "1".

Ще определим условието за решаване на матричните уравнения

$$A \oplus_{(\circ)} X = B, \tag{1}$$

$$A \otimes_{(\circ)} X = B, \tag{2}$$

$$A \ominus X = B, \tag{3}$$

и ще съставим индексирана матрица X с минимален и максимален брой редове и колони, чиито елементи са реални числа.

Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици с операция събиране.

Нека означим с $X = [Y, Z, c_{t_u,v_w}]$. Когато трябва да решим уравнение (1), виждаме, че ако $K - P \neq \emptyset$, т.е. когато $k \in K - P$, тогава $k \in (K \cup Y) - P$, което е невъзможно. Следователно едно от условията за съществуване на решения на (1) е $K \subseteq P$. По аналогия, второто условие ще бъде: $L \subseteq Q$.

Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици с операция събиране и подоперация събиране. За решението на уравнение (1)

имаме

$$X = [Y, Z, \{c_{t_u,v_w}\}] = B \oplus_{(-)} A = [P, Q, \{c_{t_u,v_w}\}]$$

и

$$c_{t_u,v_w} = \begin{cases} b_{p_r,q_s}, & \text{ако } t_u = p_r \in P \\ & \text{и } v_w = q_s \in Q - L \\ & \text{или } t_u = p_r \in P - K \\ & \text{и } v_w = q_s \in Q \\ b_{p_r,q_s} - a_{k_i,l_j} & \text{ако } t_u = k_i = p_r \in K \cap P \\ & \text{и } v_u = l_j = q_s \in L \cap Q \\ e_\circ, & \text{в противен случай} \end{cases},$$

Тогава,

$$A \oplus_{(+)} X = [P, Q, \{b_{p_r,q_s}\}] = B.$$

Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици с операция събиране и подоперация изваждане. Проверката на валидността на това решение, когато подоперацията е “$-$ е следната:

$$X = [Y, Z, \{c_{t_u,v_w}\}] = B \oplus_{(+)} A = [P, Q, \{c_{t_u,v_w}\}]$$

и

$$c_{t_u,v_w} = \begin{cases} b_{p_r,q_s}, & \text{ако } t_u = p_r \in P \\ & \text{и } v_w = q_s \in Q - L \\ & \text{или } t_u = p_r \in P - K \\ & \text{и } v_w = q_s \in Q \\ a_{k_i,l_j} - b_{p_r,q_s} & \text{ако } t_u = k_i = p_r \in K \cap P \\ & \text{and } v_u = l_j = q_s \in L \cap Q \\ e_\circ, & \text{в противен случай} \end{cases},$$

Тогава,

$$A \oplus_{(-)} X = [P, Q, \{b_{p_r,q_s}\}] = B.$$

Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици с операция събиране и подоперация умножение. Проверката на валидността на това решение, когато подоперацията е “$\times$“, следната:

$$X = [Y, Z, \{c_{t_u,v_w}\}] = B \oplus_{(:)} A = [P, Q, \{c_{t_u,v_w}\}],$$

където допълнителното условие за съществуване на решение е, че за всяко $k_i \in K$ и $l_j \in L$:

$$a_{k_i,l_j} \neq 0$$

и

$$c_{t_u,v_w} = \begin{cases} b_{p_r,q_s}, & \text{ако } t_u = p_r \in P \\ & \text{и } v_w = q_s \in Q - L \\ & \text{или } t_u = p_r \in P - K \\ & \text{и } v_w = q_s \in Q \\ b_{p_r,q_s} : a_{k_i,l_j} & \text{ако } t_u = k_i = p_r \in K \cap P \\ & \text{and } v_u = l_j = q_s \in L \cap Q \\ e_\circ, & \text{в противен случай} \end{cases},$$

Тогава,

$$A \oplus_{(\times)} X = [P, Q, \{b_{p_r,q_s}\}] = B.$$

Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици с операция събиране и подоперация деление. Сега, имаме решението

$$X = [Y, Z, \{c_{t_u,v_w}\}] = B \oplus_{(\times)} A = [P, Q, \{c_{t_u,v_w}\}],$$

където допълнителното условие за съществуване на решение е, че за всяко $p_r \in P$ и $q_s \in Q$:

$$b_{p_r,q_s} \neq 0$$

и

$$c_{t_u,v_w} = \begin{cases} b_{p_r,q_s}, & \text{ако } t_u = p_r \in P \\ & \text{и } v_w = q_s \in Q - L \\ & \text{или } t_u = p_r \in P - K \\ & \text{и } v_w = q_s \in Q \\ a_{k_i,l_j} : b_{p_r,q_s} & \text{ако } t_u = k_i = p_r \in K \cap P \\ & \text{и } v_u = l_j = q_s \in L \cap Q \\ e_\circ, & \text{в противен случай} \end{cases},$$

Тогава,

$$A \oplus_{(:)} X = [P, Q, \{b_{p_r,q_s}\}] = B.$$

Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици с почленно умножение.

Ако $P \cap K = 0$ или $Q \cap L = 0$, или ако $K \subset P$, т.е. $K \neq P$ или $L \subset Q$, т.е. $L \neq Q$, тогава уравнението

$$A \otimes_{(\circ)} X = B$$

няма решение.

Следователно условието за съществуване на решение на (2) е $P \subseteq K$ и $Q \subseteq L$.

Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици с операция почленно умножение и подоперация събиране. Ако подоперацията е "+", имаме

$$X = [Y, Z, \{c_{t_u,v_w}\}] = B \otimes_{(-)} A = [P, Q, \{c_{t_u,v_w}\}],$$

където

$$c_{t_u,v_w} = b_{p_r,q_s} - a_{k_i,l_j}$$

за $t_u = k_i = p_r \in P$ и $v_w = l_j = q_s \in Q$.

Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици с операция почленно умножение и подоперация изваждане. Ако подоперацията е "−", имаме

$$X = [Y, Z, \{c_{t_u,v_w}\}] = B \otimes_{(+)} A = [P, Q, \{c_{t_u,v_w}\}],$$

където

$$c_{t_u,v_w} = a_{k_i,l_j} - b_{p_r,q_s}$$

за $t_u = k_i = p_r \in P$ и $v_w = l_j = q_s \in Q$.

Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици с операция почленно умножение и подоперация умножение. Ако подоперацията е "×", имаме

$$X = [Y, Z, \{c_{t_u,v_w}\}] = B \otimes_{(:)} A = [P \cap K, Q \cap L, \{c_{t_u,v_w}\}],$$

където допълнителното условие за съществуване на решение е, че за $k_i \in P$ и $l_j \in Q$:

$$a_{k_i,l_j} \neq 0$$

и

$$c_{t_u,v_w} = b_{p_r,q_s} : a_{k_i,l_j}$$

за $t_u = k_i = p_r \in P$ и $v_w = l_j = q_s \in Q$.

Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици с операция почленно умножение и подоперация деление. Ако подоперацията е ":", имаме

$$X = [Y, Z, \{c_{t_u,v_w}\}] = B \otimes_{(\times)} A = [P \cap K, Q \cap L, \{c_{t_u,v_w}\}],$$

където допълнителното условие за съществуване на решение е, че за $p_r \in P$ и $q_s \in Q$:

$$b_{p_r,q_s} \neq 0$$

и

$$c_{t_u,v_w} = a_{k_i,l_j} : b_{p_r,q_s}$$

за $t_u = k_i = p_r \in K \cap P$ и $v_w = l_j = q_s \in L \cap Q$.

Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици с операция изваждане.

В този случай виждаме, че индексираните матрици A and B трябва да отговарят на условията $P \subseteq K, Q \subseteq L$.

Ако $K = P$ или $L = Q$, тогава

$$A \ominus X = B$$

има решението

$$X = [\emptyset, \emptyset, \{*\}],$$

където символът "$*$" означава липса на елементи.

Когато $P \subset K$, т.е., $P \neq K$ и $Q \subset L$, i.e., $Q \neq L$, тогава уравнение (3)

$$X = [K - P, L - Q, \{c_{t_u,v_w}\}]$$

има решение където за всеки $t_u \in K - P$ and $v_w \in L - Q$, c_{t_u,v_w} са произволни реални числа.

0.1.2 Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици, чиито елементи са интуиционистки размити двойки.

Нека са дадени две индексирани матрици $A = [K, L, \{a_{k_i,l_j}\}]$ and $B = [P, Q, \{b_{p_r,q_s}\}]$, чиито елементи са интуиционистки размити двойки, където

$$a_{k_i,l_j} = \langle \alpha_{k_i,l_j}, \beta_{k_i,l_j} \rangle,$$
$$b_{p_r,q_s} = \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s} \rangle.$$

Ще определим условието за решаване на матричните уравнения

$$A \oplus_{(\circ)} X = B, \tag{4}$$

$$A \otimes_{(\circ)} X = B, \tag{5}$$

$$A \ominus X = B, \tag{6}$$

и ще съставим индексирана матрица X с минимален и максимален брой редове и колони в случая, когато елементи са интуиционистки размити двойки. Всяка интуиционистки размита двойка има формата $\langle a, b \rangle$, където $a, b \in [0, 1]$ и $a + b \leq 1$. За две интуиционистки размити двойки различни релации и операции са описани, но тук ние ще използва само следното:

$$\langle a,b\rangle \le \langle c,d\rangle \quad \text{ако} \quad a \le c \quad \text{и} \quad b \ge d,$$

$$\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle \quad \text{ако} \quad a = c \quad \text{и} \quad b = d,$$
$$\langle a,b\rangle \wedge \langle c,d\rangle = \langle \min(a,c), \max(b,d)\rangle,$$
$$\langle a,b\rangle \vee \langle c,d\rangle = \langle \max(a,c), \min(b,d)\rangle.$$

Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици с операция събиране.

Нека означим с

$$X = [Y, Z, \{y_{u_v,w_t}, z_{u_v,w_t}\}].$$

Нека

$$a_{k_i,l_j} = \langle \alpha_{k_i,l_j}, \beta_{k_i,l_j}\rangle,$$
$$b_{p_r,q_s} = \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s}\rangle$$

и

$$e_\vee = \langle 0,1\rangle,$$
$$e_\wedge = \langle 1,0\rangle.$$

когато трябва да решим уравнение (4), виждаме, че ако $K - P \neq \emptyset$, т.е., когато $k \in K - P$, тогава $k \in (K \cup Y) - P$, което е невъзможно. Следователно едно от условията за съществуване на решения на (4) е $K \subseteq P$. По аналогия, второто условие ще бъде: $L \subseteq Q$.

Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици с операция $\oplus_\wedge$. Когато операция $\circ$ е операция $\wedge$, тогава третото условие е следното:

$$(\forall k_i = p_r \in K)(\forall l_j = q_s \in L)(\langle \alpha_{k_i,l_j}, \beta_{k_i,l_j}\rangle) \ge \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s}\rangle. \tag{7}$$

Нека приемем по-долу, че тези три условия са валидни. Сега ще търсим минималното и максималното решение на (4), за случая, когато операция $\circ$ е операция $\wedge$.

За максималното решение имаме:

$$X = [P, Q, \{\langle y_{p_r,q_s}, z_{p_r,q_s}\rangle\}],$$

където

$$(\forall p_r \in P)(\forall q_s \in Q)(\langle y_{p_r,q_s}, z_{p_r,q_s}\rangle = \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s}\rangle. \tag{8}$$

Проверката на валидността на това решение е следната:

$$A \oplus_\wedge X = [K \cup Y, L \cup Z, \{\langle \varepsilon_{\eta,\theta}, \zeta_{\eta,\theta}\rangle\}]$$

(от $K \cup Y = K \cup P = P$ и $L \cup Z = L \cup Q = Q$)

$$A \oplus_\wedge X = [P, Q, \{\langle \varepsilon_{\eta,\theta}, \zeta_{\eta,\theta}\rangle\}],$$

където от (8):

$$\langle \varepsilon_{\eta,\theta}, \zeta_{\eta,\theta}\rangle = \begin{cases} \langle \alpha_{k_i,l_j}, \beta_{k_i,l_j}\rangle, & \text{ако } \ u_v = k_i \in K \\ & \text{и } w_t = l_j \in L - Q \\ & \text{или } \eta_\theta = k_i \in K - Y \\ & \text{и } \eta_\theta = l_j \in L \\ \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s}\rangle, & \text{ако } \eta_\theta = p_r \in K \\ & \text{и } \eta_\theta = q_s \in Z - L \\ & \text{или } \eta_\theta = p_r \in Y - K \\ & \text{и } \eta_\theta = q_s \in Z \\ \langle \alpha_{k_i,l_j}, \beta_{k_i,l_j}\rangle & \text{ако } \eta_\theta = k_i = p_r \in K \cap Y \\ \quad \wedge \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s}\rangle, & \text{и } \eta_\theta = l_j = q_s \in L \cap Z \\ \langle 1, 0\rangle, & \text{в противен случай} \end{cases},$$

(от $K \subseteq Y$ и $L \subseteq Z$)

$$\langle \varepsilon_{\eta,\theta}, \zeta_{\eta,\theta}\rangle = \begin{cases} \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s}\rangle, & \text{ако } \eta_\theta = p_r \in K \\ & \text{и } \eta_\theta = q_s \in Z - L \\ & \text{или } \eta_\theta = p_r \in Y - K \\ & \text{и } \eta_\theta = q_s \in Z \\ \langle \alpha_{k_i,l_j}, \beta_{k_i,l_j}\rangle & \text{ако } \eta_\theta = k_i = p_r \in K \cap Y \\ \quad \wedge \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s}\rangle, & \text{и } \eta_\theta = l_j = q_s \in L \cap Z \end{cases},$$

(от (7))

$$\langle \varepsilon_{\eta,\theta}, \zeta_{\eta,\theta}\rangle = \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s}\rangle.$$

Тогава,

$$A \oplus_\circ X = [P, Q, \{\langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s}\rangle\}] = B.$$

За минималното решение на (4) има три случая.

Случай 1: ако $L = Q$ и ако

$$(\exists C : \emptyset \neq C \subseteq K)(\forall k_i \in C)(\forall l_j \in L)(\langle \alpha_{k_i,l_j}, \beta_{k_i,l_j}\rangle = \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s}\rangle).$$

Тогава

$$X = [P - C, Q, \{\langle y_{p_r,q_s}, z_{p_r,q_s}\rangle\}],$$

както по-горе

$$(\forall p_r \in P)(\forall q_s \in Q)(\langle y_{p_r,q_s}, z_{p_r,q_s}\rangle = \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s}\rangle.$$

Случай 2: ако $K = P$ и ако

$$(\exists D : \emptyset \neq D \subseteq L)(\forall l_j \in D)(\forall k_i \in K)(\langle \alpha_{k_i,l_j}, \beta_{k_i,l_j}\rangle = \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s}\rangle).$$

Тогава

$$X = [P, Q - D, \{\langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s}\rangle\}].$$

Случай 3: ако $K = P$ и $L = Q$ и ако

$$(\exists C : \emptyset \neq C \subseteq K)(\forall k_i \in C)(\forall l_j \in L)(\langle \alpha_{k_i,l_j}, \beta_{k_i,l_j}\rangle = \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s}\rangle)$$

$$\& \ (\exists D : \emptyset \neq D \subseteq L)(\forall l_j \in D)(\forall k_i \in K)(\langle \alpha_{k_i,l_j}, \beta_{k_i,l_j}\rangle = \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s}\rangle).$$

Тогава

$$X = [P - C, Q - D, \{\langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s} \rangle\}].$$

Ще проверим валидността на третия случай, тъй като проверките на първите два са подобни.

$$A \oplus_\wedge X = [P - C, Q - D, \{\langle \varepsilon_{\eta,\theta}, \zeta_{\eta,\theta} \rangle\}],$$

където от (8):

$$\langle \varepsilon_{\eta,\theta}, \zeta_{\eta,\theta} \rangle = \begin{cases} \langle \alpha_{k_i,l_j}, \beta_{k_i,l_j} \rangle, & \text{ако } u_v = k_i \in K \\ & \text{и } w_t = l_j \in L - (Q - D) \\ & \text{или } \eta_\theta = k_i \in K - (P - C) \\ & \text{и } \eta_\theta = l_j \in L \\ \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s} \rangle, & \text{ако } \eta_\theta = p_r \in P - C \\ & \text{и } \eta_\theta = q_s \in (Q - D) - L \\ & \text{или } \eta_\theta = p_r \in (P - C) - K \\ & \text{и } \eta_\theta = q_s \in Q - D \\ \langle \alpha_{k_i,l_j}, \beta_{k_i,l_j} \rangle & \text{ако } \eta_\theta = k_i = p_r \in K \cap (P - C) \\ \quad \wedge \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s} \rangle, & \text{и } \eta_\theta = l_j = q_s \in L \cap (Q - D) \\ e_\circ, & \text{в противен случай} \end{cases},$$

(от $K - (P - C) = \emptyset$ и $L - (Q - D) = \emptyset$)

$$\langle \varepsilon_{\eta,\theta}, \zeta_{\eta,\theta} \rangle = \begin{cases} \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s} \rangle, & \text{ако } \eta_\theta = p_r \in P - C \\ & \text{и } \eta_\theta = q_s \in (Q - D) - L \\ & \text{или } \eta_\theta = p_r \in (P - C) - K \\ & \text{и } \eta_\theta = q_s \in Q - D \\ \langle \alpha_{k_i,l_j}, \beta_{k_i,l_j} \rangle & \text{ако } \eta_\theta = k_i = p_r \in K \cap (P - C) \\ \quad \wedge \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s} \rangle, & \text{и } \eta_\theta = l_j = q_s \in L \cap (Q - D) \end{cases},$$

(от (7))

$$\langle \varepsilon_{\eta,\theta}, \zeta_{\eta,\theta} \rangle = \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s} \rangle.$$

Тогава,

$$A \oplus_\circ X = [P - C, Q - D, \{\langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s} \rangle\}] = B.$$

Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици с операция $\oplus_\vee$. Когато операция $\circ$ е операция $\vee$, тогава третото условие е следното:

$$(\forall k_i = p_r \in K)(\forall l_j = q_s \in L)(\langle \alpha_{k_i,l_j}, \beta_{k_i,l_j} \rangle) \leq \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s} \rangle. \tag{9}$$

Ако приемем, че тези три условия са валидни, тогава ще видим, че максималното решение има същата форма, както по-горе:

$$X = [P, Q, \{\langle y_{p_r,q_s}, z_{p_r,q_s} \rangle\}],$$

където

$$(\forall p_r \in P)(\forall q_s \in Q)(\langle y_{p_r,q_s}, z_{p_r,q_s} \rangle = \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s} \rangle.$$

Същото важи и за минималните решения на (4), така както и проверките.

Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици с операция почленно умножение.

Когато трябва да решим уравнение (5), виждаме, че ако $P - K \neq \emptyset$, т.е., когато $k \in P - K$, тогава $k \notin (K \cap Y) = P$, което е невъзможно. Следователно едно от условията за съществуване на решения на (5) е $P \subseteq K$. По аналогия, второто условие ще бъде: $Q \subseteq L$.

Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици с операция $\otimes_\wedge$. Когато операция $\circ$ е операция $\wedge$, тогава третото условие е: неравенствата от (7) да са валидни. По същия начин, както по-горе, виждаме, че решението е

$$X = [P, Q, \{\langle y_{p_r,q_s}, z_{p_r,q_s}\rangle\}]$$

и елементите му удовлетворяват (8).

Важно в този случай е, че индексираната матрица X , чиито елементи са интуиционистки размити двойки, е уникално (минимално) решение и за всеки две множества C and D, така че $C \cap K = \emptyset$, $D \cap L = \emptyset$, индексираната матрица X, чиито елементи са интуиционистки размити двойки

$$X = [P \cup C, Q \cup D, \{\langle y_{p_r,q_s}, z_{p_r,q_s}\rangle\}]$$

е решение на (5), когато елементите му с индекси от множествата P and Q отговарят на условието (8), а другите индекси са произволни интуиционистки размити двойки.

Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици с операция $\otimes_\vee$. В настоящия случай минималното решение е

$$X = [P, Q, \{\langle y_{p_r,q_s}, z_{p_r,q_s}\rangle\}]$$

където неговите елементи отговарят на условие (9).

Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици с операция изваждане.

В този случай виждаме отново, че индексираните матрици A and B, чиито елементи са интуиционистки размити двойки, трябва да отговарят на условията $P \subseteq K, Q \subseteq L$. Сега, (минималното) решение е

$$X = [K - P, L - Q, \{\langle y_{p_r,q_s}, z_{p_r,q_s}\rangle\}],$$

където елементите на индексираната матрица X са произволни интуиционистки размити двойки.

0.2 Детерминанта и перманента на индексирана матрица

Нека е дадена индексирана матрица:

$$A = [K, L, \{a_{k_i,l_j}\}] = \begin{array}{c|cccc} & l_1 & l_2 & \dots & l_n \\ \hline k_1 & a_{k_1,l_1} & a_{k_1,l_2} & \dots & a_{k_1,l_n} \\ k_2 & a_{k_2,l_1} & a_{k_2,l_2} & \dots & a_{k_2,l_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_m & a_{k_m,l_1} & a_{k_m,l_2} & \dots & a_{k_m,l_n} \end{array}$$

където К = $\{k_1, k_2, ..., k_m\}$, L = $\{l_1, l_2, ..., l_n\}$, и за 1 ≤ i ≤ m, 1 ≤ j ≤ n: $a_{k_i,l_j} \in \mathcal{R}$, където $\mathcal{R}$ е множество на реалните числа. При $m \leq n$ ще изчислим детерминантата и перманентата пермутирайки произведението на диагоналите по редове, а при $n \leq m$ ще изчислим детерминантата и перманентата пермутирайки произведението на диагоналите по колони. С det_r ще означим детерминантата по редове, а с det_c ще означим детерминантата по колони. Аналогично с $perm_r$ ще означим перманентата по редове, а с $perm_c$ ще означим перманентата по колони.

Дефиниция 1: Детерминанта по ред на ИМ

Нека $m \leq n$ и нека $V_{n^m}(l_1, l_2, \dots, l_n)$ е множеството на всички m-елементни вариации на $l_1, l_2, \dots, l_n$. Тогава

$$det_r \begin{matrix} \langle k_1, \dots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_n \rangle \end{matrix} (A) = \sum_{[s_1,\dots,s_m] \in V_n^m(l_1,\dots,l_n)} (-1)^{[s_1,\dots,s_m]} a_{k_1,s_1} \dots a_{k_m,s_m}.$$

Дефиниция 2: Детерминанта по стълб на ИМ

Нека $n \leq m$ и нека $V_{m^n}(k_1, k_2, \dots, k_m)$ е множеството на всички n-елементни вариации на $k_1, k_2, \dots, k_m$. Тогава

$$det_c \begin{matrix} \langle k_1, \dots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_n \rangle \end{matrix} (A) = \sum_{[s_1,\dots,s_m] \in V_m^n(k_1,\dots,k_m)} (-1)^{[s_1,\dots,s_m]} a_{s_1,l_1} \dots a_{s_n,l_n}.$$

Дефиниция 3: Перманента по ред на ИМ

Нека $m \leq n$ и нека $V_{n^m}(l_1, l_2, \dots, l_n)$ е множеството на всички m-елементни вариации на $l_1, l_2, \dots, l_n$. Тогава

$$det_r \begin{matrix} \langle k_1, \dots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_n \rangle \end{matrix} (A) = \sum_{[s_1,\dots,s_m] \in V_n^m(l_1,\dots,l_n)} a_{k_1,s_1} \dots a_{k_m,s_m}.$$

Дефиниция 4: Перманента по стълб на ИМ

Нека $n \leq m$ и нека $V_{m^n}(k_1, k_2, \dots, k_m)$ е множеството на всички n-елементни вариации на $k_1, k_2, \dots, k_m$. Тогава

$$det_c \begin{matrix} \langle k_1, \dots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_n \rangle \end{matrix} (A) = \sum_{[s_1,\dots,s_m] \in V_m^n(k_1,\dots,k_m)} a_{s_1,l_1} \dots a_{s_n,l_n}.$$

0.2.1 Свойства на детерминанта и перманента на индексирана матрица

Може да дефинираме лема 1 на детерминантата и перманентата на ИМ .

Лема 1

Ако един от редовете или стълбовете на А се състои само от нули, то

$$det_c \begin{matrix} \langle k_1, \dots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_n \rangle \end{matrix} (A) = 0,$$

$$det_r \begin{matrix} \langle k_1, \dots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_n \rangle \end{matrix} (A) = 0,$$

$$perm_c \begin{matrix} \langle k_1, \dots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_n \rangle \end{matrix} (A) = 0,$$

и

$$perm_r \begin{matrix} \langle k_1, \dots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_n \rangle \end{matrix} (A) = 0.$$

Доказателство:

Нека $k_x \in K$, където $1 \le x \le$ m и нека всички елементи $a_{k_x, l_j} = 0$. От определението за детерминанта следва, че за всеки член от развитието на детерминанта участва като множител елемент от реда k_x, откъдето

$$det_c \begin{matrix} \langle k_1, \dots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_n \rangle \end{matrix} (A) = 0.$$

Аналогично нека $l_y \in L$, където $1 \le y \le$ n и нека всички елементи $a_{k_i, l_y} = 0$. От определението за детерминанта следва, че за всеки член от развитието на детерминанта участва като множител елемент от реда l_y, откъдето

$$det_r \begin{matrix} \langle k_1, \dots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_n \rangle \end{matrix} (A) = 0.$$

По аналогичен начин се доказват равенствата за перманента.

Лема 2

Ако $\lambda \in \mathcal{R}$, то

$$det_r \begin{matrix} \langle k_1, \dots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_n \rangle \end{matrix} (A) = \sum_{[s_1,\dots,s_m] \in V_n^m(l_1,\dots,l_n)} (-1)^{[s_1,\dots,s_m]} \lambda a_{k_1,s_1} \dots \times a_{k_i,s_i} \dots a_{k_m,s_m} =$$

$$\lambda \times \sum_{[s_1,\dots,s_m] \in V_n^m(l_1,\dots,l_n)} (-1)^{[s_1,\dots,s_m]} a_{k_1,s_1} \dots a_{k_m,s_m},$$

$$det_c \begin{matrix} \langle k_1, \dots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_n \rangle \end{matrix} (A) = \sum_{[s_1,\dots,s_m] \in V_m^n(k_1,\dots,k_m)} (-1)^{[s_1,\dots,s_m]} \lambda a_{s_1,l_1} \times a_{s_j,l_j} a_{s_n,l_n} =$$

$$\lambda \times \sum_{[s_1,\dots,s_m] \in V_m^n(k_1,\dots,k_m)} (-1)^{[s_1,\dots,s_m]} a_{s_1,l_1} \dots a_{s_n,l_n},$$

$$perm_r \begin{matrix} \langle k_1, \dots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_n \rangle \end{matrix} (A) = \sum_{[s_1,\dots,s_m] \in V_n^m(l_1,\dots,l_n)} \lambda a_{k_1,s_1} \dots \times a_{k_i,s_i} \dots a_{k_m,s_m} =$$

$$\lambda \times \sum_{[s_1,\dots,s_m] \in V_n^m(l_1,\dots,l_n)} a_{k_1,s_1} \dots a_{k_m,s_m},$$

$$perm_c \begin{matrix} \langle k_1, \dots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_n \rangle \end{matrix} (A) = \sum_{[s_1,\dots,s_m] \in V_m^n(k_1,\dots,k_m)} \lambda a_{s_1,l_1} \times a_{s_j,l_j} a_{s_n,l_n} =$$

$$\lambda \times \sum_{[s_1,\dots,s_m] \in V_m^n(k_1,\dots,k_m)} a_{s_1,l_1} \dots a_{s_n,l_n}.$$

Лема 3

Нека $k_x, k_y \in K$, където $1 \leq x \leq m$, $1 \leq y \leq m$ и $x \neq y$. Също така е изпълнено, че $a_{k_x,l_1} = a_{k_y,l_1}$, $a_{k_x,l_2} = a_{k_y,l_2}$, ..., $a_{k_x,l_j} = a_{k_y,l_j}$, ... $a_{k_x,l_n} = a_{k_y,l_n}$ за $1 \leq x \leq m$, $1 \leq y \leq m$, $1 \leq j \leq n$, то

$$det \begin{matrix} \langle k_1, \dots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_n \rangle \end{matrix} (A) = 0$$

и

$$perm \begin{matrix} \langle k_1, \dots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_n \rangle \end{matrix} (A) = 0.$$

Доказателство:

Нека $x < y$. На всеки член $a_{k_1,s_1} \dots a_{k_x,s_x} a_{k_y,s_y} \dots a_{k_m,s_m}$ от развитието на детерминантата да съпоставим члена $a_{k_1,s_1} \dots a_{k_y,s_y} a_{k_x,s_x} \dots a_{k_m,s_m}$. Първият от тях участва със знак $(-1)^{[k_1,\dots k_x,k_y \dots k_m]}$, а вторият със знак $(-1)^{[k_1,\dots k_y,k_x \dots k_m]}$. Според Лема за пермутациите, която гласи, че ако една пермутация се получава от друга с помощта на транспозиция, то двете пермутации са с различна четност, тези знаци са противоположни. Освен това, от $a_{k_x,l_j} = a_{k_y,l_j}$ за $1 \leq j \leq$ n следва, че тези два члена са равни по абсолютна стойност. Така всички членове в развитието на детерминантата се разбиват на двойки със сума, равна на нула и следователно

$$det_c \begin{matrix} \langle k_1, \dots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_n \rangle \end{matrix} (A).$$

Аналогично нека $l_x, l_y \in L$, където $1 \leq x \leq n$, $1 \leq y \leq n$ и $x \neq y$. Също така е изпълнено, че $a_{k_1,l_x} = a_{k_1,l_y}$, $a_{k_2,l_x} = a_{k_2,l_y}$, ..., $a_{k_i,l_x} = a_{k_i,l_y}$, ... $a_{k_m,l_x} = a_{k_m,l_y}$ за $1 \leq x \leq n$, $1 \leq y \leq n$, $1 \leq i \leq m$, то

$$det_r \begin{matrix} \langle k_1, \dots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_n \rangle \end{matrix} (A) = 0.$$

Нека $x < y$. На всеки член $a_{k_1,s_1} \dots a_{k_x,s_x} a_{k_y,s_y} \dots a_{k_m,s_m}$ от развитието на детерминантата да съпоставим члена $a_{k_1,s_1} \dots a_{k_y,s_y} a_{k_x,s_x} \dots a_{k_m,s_m}$. Първият от тях участва със знак $(-1)^{[k_1,\dots k_x,k_y \dots k_m]}$, а вторият със знак $(-1)^{[k_1,\dots k_y,k_x \dots k_m]}$. Според Лема за пермутациите, която гласи, че ако една пермутация се получава от друга с помощта на транспозиция, то двете пермутации са с различна четност, тези знаци са противоположни. Освен това, от $a_{k_x,l_j} = a_{k_y,l_j}$ за $1 \leq j \leq n$ следва, че тези два члена са равни по абсолютна стойност. Така всички членове в развитието на детерминантата се разбиват на двойки със сума, равна на нула и следователно

$$det_{\begin{matrix} \langle k_1, \dots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_n \rangle \end{matrix}} (A) = 0.$$

По аналогичен начин се доказва равенството за перманента.

Лема 4

Ако $\lambda \in \mathcal{R}$ и нека $k_x, k_y \in K$, където $1 \leq x \leq m$, $1 \leq y \leq m$ и $x \neq y$. Също така е изпълнено, че $a_{k_x,l_1} = \lambda \times a_{k_y,l_1}$, $a_{k_x,l_2} = \lambda \times a_{k_y,l_2}$, ..., $a_{k_x,l_j} = \lambda \times a_{k_y,l_j}$, ... $a_{k_x,l_n} = \lambda \times a_{k_y,l_n}$ за $1 \leq x \leq m$, $1 \leq y \leq m$, $1 \leq j \leq n$, то

$$det \begin{array}{c}\langle k_1, \ldots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \ldots, l_n \rangle\end{array} (A) = 0$$

и

$$perm \begin{array}{c}\langle k_1, \ldots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \ldots, l_n \rangle\end{array} (A) = 0.$$

Доказателство:

Нека $x < y$. От Лема 2 и 3 имаме

$$det \begin{array}{c}\langle k_1, \ldots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \ldots, l_n \rangle\end{array} (A) = \sum_{[s_1,\ldots,s_m] \in V_n^m(l_1,\ldots,l_n)} (-1)^{[s_1,\ldots,s_m]} a_{k_1,s_1} \ldots a_{k_x,s_x} \ldots \lambda \times a_{k_x,s_x} \ldots a_{k_m,s_m}$$

$$=$$

$$\lambda \times \sum_{[s_1,\ldots,s_m] \in V_n^m(l_1,\ldots,l_n)} (-1)^{[s_1,\ldots,s_m]} a_{k_1,s_1} \ldots a_{k_m,s_m} = \lambda \times 0 = 0.$$

Аналогично ако $\lambda \in \mathcal{R}$ и нека $l_x, l_y \in L$, където $1 \leq x \leq$ n, $1 \leq y \leq$ n и $x \neq y$. Също така е изпълнено, че $a_{k_1,l_x} = \lambda \times a_{k_1,l_y}$, $a_{k_2,l_x} = \lambda \times a_{k_2,l_y}$, ..., $a_{k_i,l_x} = \lambda \times a_{k_i,l_y}$, ... $a_{k_m,l_x} = \lambda \times a_{k_m,l_y}$ за $1 \leq x \leq n$, $1 \leq y \leq n$, $1 \leq i \leq m$, то

$$det \begin{array}{c} \\ \langle k_1, \ldots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \ldots, l_n \rangle\end{array} (A) = 0.$$

Нека $x < y$. От Лема 2 и 3 имаме

$$det \begin{array}{c}\langle k_1, \ldots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \ldots, l_n \rangle\end{array} (A) = \sum_{[s_1,\ldots,s_m] \in V_m^n(k_1,\ldots,k_m)} (-1)^{[s_1,\ldots,s_m]} a_{s_1,l_1} \ldots a_{s_x,l_x} \ldots \lambda \times a_{s_x,l_x} \ldots a_{s_n,l_n} =$$

$$\lambda \times \sum_{[s_1,\ldots,s_m] \in V_m^n(k_1,\ldots,k_m)} (-1)^{[s_1,\ldots,s_m]} a_{s_1,l_1} \ldots a_{s_n,l_n} = \lambda \times 0 = 0.$$

По аналогичен начин се доказва равенството за перманента.

Лема 5

Ако $\lambda \in \mathcal{R}$ и нека $k_x, k_y \in K$, където $1 \leq x \leq m$, $1 \leq y \leq m$ и $x \neq y$. Също така е изпълнено, че $a_{k_x,l_1} = a_{k_x,l_1} + (\lambda \times a_{k_y,l_1})$, $a_{k_x,l_2} = a_{k_x,l_2} + (\lambda \times a_{k_y,l_2})$, ..., $a_{k_x,l_j} = a_{k_x,l_j} + (\lambda \times a_{k_y,l_j})$, ... $a_{k_x,l_n} = a_{k_x,l_n} + (\lambda \times a_{k_y,l_n})$ за $1 \leq x \leq m$, $1 \leq y \leq m$, $1 \leq j \leq n$, то детерминантата не се променя. По-общо, ако към даден ред прибавим произволна линейна комбинация на останалите редове, детерминантата не се променя.

Доказателство: Нека $x < y$.

От Лема 4 имаме

$$det \begin{array}{c}\langle k_1, \ldots, k_m \rangle \\ \langle l_1, \ldots, l_n \rangle\end{array} (A) = \sum_{[s_1,\ldots,s_m] \in V_n^m(l_1,\ldots,l_n)} (-1)^{[s_1,\ldots,s_m]} a_{k_1,s_1} \ldots a_{k_x,s_x} \ldots a_{k_m,s_m}$$

$+$

$$\sum_{[s_1,\ldots,s_m]\in V_n^m(l_1,\ldots,l_n)} (-1)^{[s_1,\ldots,s_m]} a_{k_1,s_1}\ldots\lambda\times a_{k_y,s_y}\ldots a_{k_m,s_m}$$

$=$

$$det \begin{matrix}\langle k_1,\ldots,k_m\rangle\\ \langle l_1,\ldots,l_n\rangle\end{matrix} (A)+0$$

$=$

$$det \begin{matrix}\langle k_1,\ldots,k_m\rangle\\ \langle l_1,\ldots,l_n\rangle\end{matrix} (A).$$

Аналогично ако $\lambda \in \mathcal{R}$ и нека $l_x, l_y \in L$, където $1 \le x \le n$, $1 \le y \le n$ и $x \ne y$. Също така е изпълнено, че $a_{k_1,l_x} = a_{k_1,l_x} + (\lambda \times a_{k_1,l_y})$, $a_{k_2,l_x} = a_{k_2,l_x} + (\lambda \times a_{k_2,l_y})$, ..., $a_{k_i,l_x} = a_{k_i,l_x} + (\lambda \times a_{k_i,l_y})$, ... $a_{k_m,l_x} = a_{k_m,l_x} + (\lambda \times a_{k_m,l_y})$ за 1 ≤ x ≤ n, 1 ≤ y ≤ n, $1 \le i \le m$, то детерминантата не се променя. По-общо, ако към даден стълб прибавим произволна линейна комбинация на останалите стълбове, детерминантата не се променя.

Нека $x < y$. От Лема 4 имаме

$$det \begin{matrix}\langle k_1,\ldots,k_m\rangle\\ \langle l_1,\ldots,l_n\rangle\end{matrix} (A) = \sum_{[s_1,\ldots,s_m]\in V_m^n(k_1,\ldots,k_m)} (-1)^{[s_1,\ldots,s_m]} a_{s_1,l_1}\ldots a_{s_x,l_x}\ldots a_{s_x,l_x}\ldots a_{s_n,l_n} =$$

$+$

$$\sum_{[s_1,\ldots,s_m]\in V_m^n(k_1,\ldots,k_m)} (-1)^{[s_1,\ldots,s_m]} a_{s_1,l_1}\ldots a_{s_x,l_x}\ldots\lambda\times a_{s_y,l_y}\ldots a_{s_n,l_n} =$$

$=$

$$det \begin{matrix}\langle k_1,\ldots,k_m\rangle\\ \langle l_1,\ldots,l_n\rangle\end{matrix} (A)+0$$

$=$

$$det \begin{matrix}\langle k_1,\ldots,k_m\rangle\\ \langle l_1,\ldots,l_n\rangle\end{matrix} (A).$$

По аналогичен начин се доказва твърдението за перманента.

0.2.2 Представяне на блок-диаграма с ИМ

Блоковата диаграма е една от най-интересните комбинаторни конфигурации - тя е не само чисто математически обект, но и средство за решаване на редица практически задачи.

Нека първо да разгледаме един пример. Да предположим, че трябва да сравним добива от v сорта на всяка селска култура, да речем пшеница и имаме на разположение b опитни полета. Тъй като добивът зависи не само от сорта, но и от разликите в условията на развитие на растенията (предимно от плодородието на почвата), експериментът за тестване на добива зависи не само от сорта, но и от разликите в условията на развитие на растенията (предимно от плодородните почви), тогава експериментът за тестване на добива ще бъде извършен правилно, ако е възможно да се елиминира влиянието на тези разлики.

Нека разгледаме пример, показващ, че такъв експеримент е осъществим при определени условия. Да кажем, че трябва да тестваме 6 сорта пшеница и имаме 10 опитни полета. Нека означим тези разновидности с $v_1, v_2, ..., v_6$, а полетата с $b_1, b_2, ..., b_{10}$. Тогава може да съставим ИМ А с колони $K = \{b_1, b_2, ..., b_{10}\}$ и редове $L = \{v_1, v_2, ..., v_6\}$ и елементи 1 - за засято растение от вид l_j на поле k_i и 0, ако дадено поле не е засято, където $1 \leq i \leq 10$ и $1 \leq j \leq 6$. Тогава може да съставим ИМ на добива на сортове

$$A_k = [K, L, \{a_{k_i,l_j}\}],$$

където с a_{k_i,l_j} ще означим добивът от всеки сорт пшеница:

$$A = [K, L, \{a_{k_{10},l_6}\}] = \begin{array}{c|cccc} & l_1 & l_2 & \dots & l_6 \\ \hline k_1 & a_{k_1,l_1} & a_{k_1,l_2} & \dots & a_{k_1,l_6} \\ k_2 & a_{k_2,l_1} & a_{k_2,l_2} & \dots & a_{k_2,l_6} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{10} & a_{k_{10},l_1} & a_{k_{10},l_2} & \dots & a_{k_{10},l_6} \end{array}$$

и $1 \leq i \leq 10$ и $1 \leq j \leq 6$.

Нека сега разделим всяко поле на 3 части и да засеем полетата по следната схема (в скоби са сортовете, засети в площи на съответното поле):

$b_1 - \{v_1, v_2, v_3\}$,
$b_5 - \{v_1, v_5, v_6\}$,
$b_8 - \{v_2, v_4, v_6\}$,
$b_2 - \{v_1, v_2, v_5\}$,
$b_6 - \{v_2, v_3, v_6\}$,
$b_9 - \{v_3, v_4, v_5\}$,
$b_3 - \{v_1, v_3, v_4\}$,
$b_7 - \{v_2, v_4, v_5\}$,
$b_{10} - \{v_3, v_5, v_6\}$,
$b_4 - \{v_1, v_4, v_6\}$.

Може да проверим дали всички условия са изпълнени:

а) всеки е разделен на 3 секции;

b) всеки сорт се засява на 5 полета (например v_3 на полета $b_1, b_3, b_6, b_9, b_{10}$; v_5 на полета $b_2, b_5, b_7, b_9, b_{10}$);

c) всеки два различни сорта се засаждат заедно на произволни две полета (например v_1, v_6 на b_4, b_5; v_3, v_4 на полета b_3, b_9).

Има традиция всяка година на всяко поле да се засажда различен вид и сорт и от това, че $6 \leq 10$ и нека $V_{10^6}(k_1, k_2, \dots, k_6)$ е множеството на всички 6-елементни вариации на сортовете пшеница $k_1, k_2, \dots, k_{10}$. Тогава

$$det_c \begin{array}{c} \langle k_1, \dots, k_{10} \rangle \\ \langle l_1, \dots, l_6 \rangle \end{array} (A) = \sum_{[s_1,\dots,s_6] \in V_{10}^6(k_1,\dots,k_6)} (-1)^{[s_1,\dots,s_6]} a_{s_1,l_1} \dots a_{s_{10},l_{10}}.$$

0.2.3 Представяне на елементи на аналитична геометрия в равнината с ИМ

Елементи на аналитична геометрия в равнината

Всяка ос с фиксирана точка, наречена начало, се нарича координатна ос. Две пресичащи се оси с начало пресечната им точка се нарича декартова координатна система по името на френския математик Рене Декарт (1596-1650). Едната ос (без значение коя, но обикновено се приема хоризонталната) се нарича абсциса, а другата - ордината. На всяка точка A от равнината може да се съпостави наредена двойка числа $\langle a_1, a_2\rangle$, които отговарят на нейните проекции върху координатните оси и се наричат нейни координати. Ако имаме две точки A и B с координати, съответно $\langle a_1, a_2\rangle$ и $\langle b_1, b_2\rangle$ са техни координати.

Ортогонална (правоъгълна) координатна система Дадена координатна система е ориентирана положително, ако ъгълът между двете оси е в интервала $(0, \pi)$ и е ориентирана отрицателно, ако ъгълът е в интервала $(\ \pi,\ 2\pi)$. При ъгъл между двете оси равен на 0 или π координатната система е изродена.Когато този ъгъл е различен от $\pm\frac{\pi}{2}$, координатната система се нарича клиногонална, а ако той е равен на $\pm\frac{\pi}{2}$ - ортогонална (правоъгълна).

Представяне на декартова координатна система с ИМ Всяка координатна система разделя равнината на четири части, които в случая на ортогонална координатна система се наричат квадранти.

Нека са дадени n на брой точки в една декартова координатна система.

Тогава нека с индексното множество $K = k_1, k_2$ означим проекциите(координатите) на всяка точка върху координатните оси. Нек с индексното множество L $= l_1, l_2, \ldots, l_n$ означим точките. Тогава може да съставим индексирана матрица $A = [K, L, \{a_{k_i,l_j}\}]$:

$$A = [K, L, \{a_{k_i,l_j}\}] = \begin{array}{c|cccc} & l_1 & l_2 & \ldots & l_n \\ \hline k_1 & a_{k_1,l_1} & a_{k_1,l_2} & \ldots & a_{k_1,l_n} \\ k_2 & a_{k_2,l_1} & a_{k_2,l_2} & \ldots & a_{k_2,l_n} \end{array},$$

където K $= \{k_1, k_2\}$, L $= \{l_1, l_2, ..., l_n\}$, за $1 \leq$ i ≤ 2, $1 \leq$ j $\leq$ n, където елементите a_{k_i,l_j} на A е координатата на всяка точка.

Представяне на уравнение на права, минаваща през две точки M_i с координати $\langle x_i, y_i\rangle$ (i = 1, 2) с ИМ Нека правата g е определена от точките $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Уравнението на правата g в детерминиран вид е:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Нека са дадени две индексни множества $L = l_1, l_2, l_3$ и $K = k_1, k_2, k_3$ тогава нека $a_{k_1,l_1} = x$, $a_{k_2,l_1} = x_1$, $a_{k_3,l_1} = x_2$, $a_{k_1,l_2} = y$, $a_{k_2,l_2} = y_1$, $a_{k_3,l_2} = y_2$, $a_{k_1,l_3} = 1$, $a_{k_2,l_3} = 1$, $a_{k_3,l_3} = 1$, тогава може да съставим индексирана матрица на правата g

$$A = \begin{array}{c|ccc} & l_1 & l_2 & l_3 \\ \hline k_1 & x & y & 1 \\ k_2 & x_1 & y_1 & 1 \\ k_3 & x_2 & y_2 & 1 \end{array},$$

където K $= \{k_1, k_2, k_3\}$, L $= \{l_1, l_2, l_3\}$, за $1 \leq$ i ≤ 3, $1 \leq$ j ≤ 3. Тогава може да решим уравнението на правата g с детерминантата на индексираната матрица A:

$$det \begin{array}{c} \langle k_1, k_2, k_3\rangle \\ \langle l_1, l_2, l_3\rangle \end{array} (A) = \sum_{[s_1,s_2,s_3]\in V_3^3(l_1,l_2,l_3)} (-1)^{[s_1,s_2,s_3]} a_{k_1,s_1} \ldots a_{k_3,s_3}.$$

Глава 3. Представяне на логическа схема с индексирани матрици

Приложение на индексирани матрици в автоматизацията на проектирането и конструирането в електрониката

Представяне на граф с индексирана матрица

Нека е дадено множество от върхове U. Нека

$$E = \{\langle u,\ v\rangle | u, v \in U\}.$$

Очевидно това е множеството на всички двойки върхове на множеството U. Нека H е произволно подмножество на K. Наредената двойка $G = [U, H]$ се нарича „неориентиран граф“. Ориентиран граф ще наричаме граф, на който за всяка негова дъга е определена и посоката й. Формално ориентираният граф се задават чрез

$$G^* = [U, H^*],$$

където U е множеството на върховете на графа, а множеството на дъгите

$$H^* \subseteq \{\langle u,\ v\rangle | u, v \in U \wedge (\langle u, v\rangle \in H^* \wedge \langle v, u\rangle \in H^* \to \langle u, v\rangle \neq \langle v, u\rangle)\}.$$

На всеки ориентиран граф $G^* = [U, H^*]$ може да се съпостави матрица с размерност $|U| \times |U|$, наречена матрица на инцидентност. Ако върховете на графа са $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$, където $n = |U|$, то ще поискаме i-тия ред и j-тия стълб да съответстват на връх x_i. Тогава (i, j), ще съответства на двойката върхове x_i и x_j ще има стойност 1, ако от x_i връх излиза дъга към връх x_j, или стойност 0 в противен случай.

Нека е даден ориентираният граф $G = [U, H^*]$. Тогава индексираната му матрица на инцидентност ще има вида (по аналогия на стандартната матрица на инцидентност)

$$IM(G) = [U, U, \{a_{k_i, l_j}\}],$$

където

$$a_{u_i, u_j} = \begin{cases} 1, & \text{ориентирана дъга } (u_i, u_j) \in H^* \\ 0, & \text{в противен случай.} \end{cases},$$

Апаратът на индицираните матрици ни предоставя възможност да намалим размерността на дадена матрица, заменяйки я с индексирана матрица с по малка размерност. Новата индексирана матрица съдържа не повече матрични елементи от първата. Формално това се записва така: ако U_1 е множеството на върховете, в които не влизат дъги (тези върхове могат да се приемат за входове на графа), а U_0 е множеството на върховете, от които не излизат дъги (тези върхове могат да се приемат за изходи на графа), то

$$IM(G) = [U - U_0, U - U_1, \{a_{u_i, u_j}\}],$$

Процедурата по намаляване на размерността на индексираната матрица можем да наречем минимализиране. Когато елемент a_{u_i, u_j} на индексирана матрица

$$IM(G)^2 = IM(G) \odot IM(G)$$

е равен на 1, това означава че от връх u_i излиза дъга до някой връх, от който излиза дъга до връх u_j. Следователно, от връх u_i има път с дължина 2 до връх u_j, а индексираната матрица $IM(G)^2$ задава всички такива пътища с дължина 2. По същия начин виждаме, че индексираната матрица $IM(G)^3$ задава всички пътища с дължина 3 и така нататък. Индексираната матрица

$$IM(G)^* = IM(G) \oplus IM(G)^2 \oplus \cdots \oplus IM(G)^n$$

където n е дължина на диаметъра на графа G, задава всички пътища в графа.

Нека с индексното множество $I = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ означим всички върхове на графа G и с $K \subset \mathcal{I}$ означим множеството на върховете, от които излиза връх, а с $L \subset \mathcal{I}$ означим множеството на върховете, в които влиза връх, където $K = \{k_1, k_2, ..., k_m\}$, $L = \{l_1, l_2, ..., l_n\}$ и за 1 ≤ i ≤ n, 1 ≤ j ≤ n.

Функционално-конструктивни модули

Съвременното развитие на електротехниката и особено производството на интегрални схеми е немислимо без автоматизацията на всички отделни етапи на проектиране – функционално, логическо, схемотехническо и конструктивно, които са тясно свързани помежду си. Конструктивното проектиране се състои в синтез и проверка на топологията. Проектирането на топологията на електронните схеми и устройства представлява процес на преобразуване на електрическата или логическата схема в информация за геометрията на слоевете. Тази информация задава формата, взаимното разположение и взаимната връзка между отделните елементи в многослойната интегрална структура. Следователно на този етап е необходимо да се решат редица задачи, свързани с конкретната реализация на принципната схема, на основата на зададения тип конструкция и избраната технология на производство. Реализацията на интегрални схеми и устройства може да се разглежда като разполагане на съвкупност от елементи (фрагменти) и свързващите ги електрически проводници в тримерното монтажно пространство при спазване на определени ограничения, обусловени от типа на конструкцията и параметрите на технологичния процес. Обособени части от проектираното устройство и схема, които в съответствие с първоначалния проектантски замисъл се характеризират с изпълнението на определени функции в рамките на общия алгоритъм на устройството, представляват функционални модули или функционални възли.

Конструктивните модули представляват елементи от конструкцията (куплунг, печатна платка и др.), от които технически се реализират електронните устройства. Анализът на условията, с които трябва да се съобразява реализирането на функционално-конструктивни модули(ФКМ), показва, че е необходимо да се спазват главно два типа ограничения.

Представяне на функционално-конструктивен модул с индексирана матрица

Декомпозицията на една сложна система на отделни подсистеми, които са свързани с други функционални модули и изпълняват конкретни функции, се извършва по йерархичен принцип. Така например функционални модули от най-ниско ниво (неделими функционални модули) са логическите елементи, отделните чипове памет, микропроцесорните схеми и други.

Съвкупност от такива функционални модули образуват функционални модули от второ ниво например микропроцесорен блок и т. н. Оценката на функционалния модул се извършват чрез параметъра за сложност. Ако йерархичният ред на краен брой функционални модули, т.е. индексирането в нарастващ ред на m на брой функционални модули, образува множеството

$$K = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}.$$

Конструктивните модули също като функционалните се характеризират със своята сложност и йерархично място в цялостната конструкция на устройството. На етапа на конструктивното проектиране се разглежда въпросът за реализуемостта на частите от проектираното устройство, които изпълняват определени функции и се обособяват отделни конструктивни модули, т. е. образуват ФКМ. Аналогично, ако йерархичният ред на краен брой конструктивни модули, т.е. индексирирането в нарастващ ред на n на брой конструктивни модули образува множеството

$$L = \{l_1, l_2, \ldots, l_n\},$$

даден функционално-конструктивен модул може да се определи от индексирана матрица

$$A = [K, L, \{a_{k_i,l_j}\}]$$

за $1 \leq i \leq m$, и за $1 \leq j \leq n$, където елементите на индексираната матрица приемат числени стойности равни на броя на връзките между всеки елемент k_i на и всеки елемент l_j като в общия случай йерархичните нива могат да бъдат различни, т.е. $i \neq j$.

Компановка на ФКМ с ИМ

Компановка със стандартни(зададени) функционално-конструктивни модули с ИМ Нека са дадени следните индексни множества

$$K = \{k_1, k_2, ..., k_m\}$$

и

$$L = \{l_1, l_2, ..., l_n\},$$

където K е множеството на различните видове стандартни ФКМ, а L е множеството на различните видове логически елементи, участващи в класическата схема.

Всеки функционално-конструктивен модул от множеството К е изграден от определен брой логически елементи - НЕ-И, НЕ-ИЛИ, тригери и т. н., при което отделните логически елементи може да са свързани помежду си или да представляват независими елементи. Логическите елементи в стандартните ФКМ отговарят на нлогическите елементи от логическата схема. Ако това не е изпълнено, винаги може да се направи такова преобразуване на логическата схема, че функционалните базиси на схемата и на стандартните ФКМ да съвпадат.

Стандартните ФКМ, изградени от несвързани логически елементи, може да се представят с помощта на индексирана матрица, в която се отразява броят на логическите елементи, влизащи в състава на ФКМ.

Броят на редовете на ИМ отговаря на броя m на различните ФКМ, а броят на стълбовете на броя n на различните типове логически елементи, т. е.

$$A = [K, L, \{a_{k_i,l_j}\}]$$

на броят на логическите елементи, влизащи в състава на един ФКМ. Всеки елемент от нея е число a_{k_i,l_j} указва броя на елементите от определен вид $1 \neq j \neq n$, които участват в стандартен функционално-конструктивен модул от тип $1 \neq i \neq m$.

При ФКМ, съставени от еднотипни логически елементи, в дадена колона l_j от индексираната матрица ще има само даден елемент, различен от 0.

При функционално-конструктивни модули, изградени от разнотипни логически елементи, броят на ненулевите елементи ще бъде повече от един.

Степента на участие на логическите елементи в логическата схема на цифрово устройство може да се оцени с вектора

$$B = [b_1, b_2, \ldots, b_n],$$

където b_i е число, което показва броя на логическите елементи в логическата схема.

Цената на реализацията на принципна електрическа схема се определя от цените на отделните ФКМ, участващи в нея.

Сложността на реализацията може да се оцени по общия брой m на стандартните ФКМ във принципната електрическа схема, а оптималният вариант по този критерии ще съответства на минимума на m.

Представяне на монтажно пространство на ФКМ с индексирана матрица и граф на връзките

Разполагането на ФКМ е основна задача и предшества решаването на заключителната задача за оформяне на конструкцията на цифровото устройство - трасировката. В най-общ вид разполагането на функционално-конструктивен модул представлява определяне на съответствието между функционално-конструктивен модул и определени позиции(места) в дадено поле, наричано монтажно пространство. Поради възможността за нееднозначност на решението съответствието между функционално-конструктивен модул и дадена позиция трябва да отговаря на определени критерии за оптималност.

Представяне на изходната информация и формализация на задачата с индексирана матрица Когато вече се посочи, изходната информация на разполагането на ФКМ е съвкупността от ФКМ, списъкът на връзките между тях и описанието на монтажното пространство. Съвкупността от ФКМ и списъкът на връзките между тях съставят принципната монтажна схема на цифровото устройство. Тази схема се състои от определен набор логически елементи И, ИЛИ, И-НЕ, ИЛИ-НЕ, тригери, приети като основни и свързани по определен начин. Чрез междуелементните връзки се подават входните сигнали на логическите елементи от физическите входове на цифровото устройство или от изходите на други логически елементи.

За формално описание на логическата схема за нуждите на компановката се използва символиката на теорията на графите и теорията на множествата.

Нека множеството на логическите елементи е краен брой и индексираме всеки един от тях.

Пълното отчитане на структурата на логическата схема може да стане чрез представянето ѝ със граф „Елемент-Сигнал“ (ГЕС) G:

$$G = [V, V_1, U],$$

където множеството V_1 на върховете на графа съответстват на логическите елементи в схемата;

V е множеството на изходите на логическите елементи, а тъй като всеки изход е източник на определен логически сигнал, множеството може да се разглежда като множество на сигналите в схемата - също върхове в графа „Елемент-Сигнал“;

U е множеството на ребрата в графа „Елемент-Сигнал“, свързващи върхове на елементите с върхове на сигналите.

За отразяване на входовете и изходите на логическите елементи ребрата се ориентират от изход на елемент към сигнален връх и от сигнален връх към вход на елемент. За да се представи само свързаността между отделните функционални възли и за да се оценят реализираните ФКМ, логическата схема на цифровото устройство може да се представи с граф, отразяващ връзките между възлите $G_1 = [V, U]$, където V е множеството от функционални възли и физически входове и изходи на логическата схема, които може да индексираме. Така те образуват индексно множество I на върховете на графа, а U е множеството на ребрата, които свързват върховете, отразяващи сумарния брой връзки между съответните възли. Разглеждането на функционалния възел без отчитане на неговите входове и изходи показва, че полученият граф е неориентиран и може да се нарича граф на връзките.

Нека с $K \subset I$ означим индексно множество на физическите входове и с $L \subset I$ означим индексно множество на физически изходи на логическата схема. Тогава графа на връзките можем да определим с индексирана матрица на връзките:

$$C = \begin{array}{c|cccc} & l_1 & l_2 & \dots & l_n \\ \hline k_1 & c_{k_1,l_1} & c_{k_1,l_2} & \cdots & c_{k_1,l_n} \\ k_2 & c_{k_2,l_1} & c_{k_2,l_2} & \cdots & c_{k_2,l_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_m & c_{k_m,l_1} & c_{k_m,l_2} & \cdots & c_{k_m,l_n} \end{array}.$$

Елементите на индексираната матрица приемат стойности 0 – за несвързан вход и изход или 1 – за свързан вход или изход. За несвързани върхове отговарящи на несвързани ФКМ, $_{k_i,l_j} = 0$.

Нека означим съвкупността от номерата на монтажните места на един ФКМ в хоризонтална посока

$$p_1, p_2, \dots, p_x$$

с индексно множеството P, където с $p_1, p_2, \dots, p_x$ означаваме всички първи места, които започват на всеки нов хоризонтален ред. Аналогично номерата във вертикална посока

$$q_1, q_2, \dots, q_y$$

образуват индексно множество Q, където с $q_1, q_2, \dots, q_y$ означаваме всички първи места, които започват на всеки нов вертикален ред. Тогава може да построим индексирана матрица на монтажните пространства (местата) $E = [P, Q, \{e_{p_r,q_s}\}]$, където елементите ѝ приемат стойности 0 или 1 – съответно за неналичие и неналичие на свободно място, където $1 \leq r \leq$ x и $1 \leq s \leq y$.

Нека с

$$H = [T, W, \{h_{p_u,q_v}\}]$$

означим индексирана матрица на заетите монтажни места. Ако има заето място във всеки един ред, то тогава $|T| = |P|$ и $0 \leq u \leq |P|$ и ако има заето място във всеки един стълб, то тогава $|W| = |Q|$ и $0 \leq v \leq |Q|$, чиито елементи също като индексираната матрица на монгажните места са 0 - за незаето или 1 - за заето. Ако нито едно място не е заето, то тогава индексираната матрица ще има вида

$$H = [T, W, \emptyset],$$

тъй като множествата на редовете и колоните са празни. След заемане на свободно място се добавя ред p_r към множеството Т, тогава $T = T \cup \{p_r\}$. Аналогично се добавя колона q_s към множеството W, тогава $W = W \cup \{q_s\}$ като елементът $h_{k_i,l_j} = 1$, а останалите елементи, които са свободни в добавения нов ред или стълб имат стойност 0. Ако има вече добавен ред или стълб, то се добавя само реда или стълба, който не е добавен и се записва стойност на елемента 1.

Самото фиксиране на функционално-конструктивен модул означава да се намери съответствието между елемента на индексираната матрица на връзките и номера на мястото от монтажното пространство.

Разположението на местата в монтажното пространство се отразяват чрез посочване на разстоянията между тях. Наистина при задаване на координатите на центъра само на едно място, разположението на останалите могат да се изразят чрез разстоянията от техните центрове до центъра на зададеното. Подобно изразяване на монтажното пространство е неудобно поради необходимостта разположението на произволни две места да се изчислява винаги, като се използва зададеното място. Поради това разположението на всяко място се означава чрез разстоянието му до всички останали места. Формалното задаване на тази информация става чрез индексирана матрица на разстоянията.

Алгоритъм за компановка със стандартен функционално-конструктивен модул с ИМ Същността на алгоритъма се изразява в търсене на такова покритие на схемата със стандартни ФКМ, което води до определяне на локален минимум на целевата функция - минимална цена на реализация на схемата. Този процес най-напред се реализира като се намири покритие на известна част от логическите елементи с ФКМ с най-ниска цена. При това за намаляване на структурния излишък се търси покритие с минимален брой ФКМ. След компановката тези логически елементи се премахват от схемата и се търси покритие за останалите чрез ФКМ с по-висока цена до покриване на всички логически елементи на схемата. Възможността за покритие на логически елемент l_j с функционално-конструктивен модул от тип k_i се определя от индексирана матрица на броят на логическите елементи, влизащи в състава на един ФКМ. Наистина, ако елементът a_{k_i,l_j} има ненулева стойност, това показва, че в схемата на функционално-конструктивния модул k_i е налице логически елемент от търсения вид. Нещо повече, самата стойност показва и броя на възможните логически елементи от вид l_j, които могат да се компановат във функционално-конструктивен модул k_i. Броят на подлежащите за компановане логически елементи l_j, участващи в логическата схема, е съответният компонент b_j от вектора B. Следователно, ако $a_{k_i,l_j} \neq 0$, показва необходимия брой ФКМ k_i, които са необходими за компановането на всички логически елементи от схемата.

Изследване с индексирани матрици на цифрови сигнали и случайни процеси

Представяне на дискретно изображение с индексирана матрица

Представяне на цифрови данни с индексирана матрица

Цифрови входно-изходни изводи

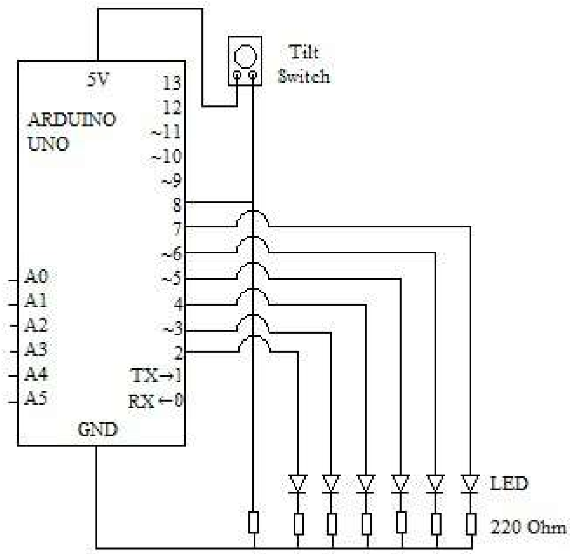
Нека с индексното множество $K = \{k_1, k_2, ..., k_m\}$ означим изводите на Ардуино, които са конфигурирани като изходи, а с индексното множеството $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ логическите стойности, които ще се зададат от изводите в определен момент от време.

Тогава може да съставим индексирана матрица на зададените логически стойности на изводите на Ардуино

$$A = \begin{array}{c|cccc} & l_1 & l_2 & \ldots & l_n \\ \hline k_1 & a_{k_1,l_1} & a_{k_1,l_2} & \ldots & a_{k_1,l_n} \\ k_2 & a_{k_2,l_1} & a_{k_2,l_2} & \ldots & a_{k_2,l_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ k_m & a_{k_m,l_1} & a_{k_m,l_2} & \ldots & a_{k_m,l_n} \end{array},$$

където елементите $\{a_{k_i,l_j}\}$ приемат стойности 0 или 1 в зависимост от логически стойности, зададени от m на брой изводи, конфигурирани като изходи, на входен извод в n на брой моменти от време, където $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$.

Цифрова схема с Arduino



Фигура 1: Цифрова схема с Arduino

На фигура 1 е представена електрическа схема, която ще задава логически стойности.

Нека броят на изводите, конфигурирани като изходи са 6, а логическите стойности, зададени за всеки един от тях са 6, тогава индексираната матрица A ще изглежда по следния начин:

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 \\ \hline k_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ k_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Нека $K_1 = \{k_1\}, K_2 = \{k_2\}, K_13 = \{k_3\}, K_4 = \{k_4\}, K_5 = \{k_5\}, K_6 = \{k_6\}$. С

$$B = [K_1, L, \{b_{k_1,l_j}\}]$$

означаваме индексирана матрица с елементи: $b_{k_1,l_1} = a_{k_1,l_1}, b_{k_1,l_2} = a_{k_1,l_2}, b_{k_1,l_3} = a_{k_1,l_3}, b_{k_1,l_4} = a_{k_1,l_4}, b_{k_1,l_5} = a_{k_1,l_5}, b_{k_1,l_6} = a_{k_1,l_6}$.

Аналогично с

$$C = [K_2, L, \{c_{k_1,l_j}\}]$$

означаваме индексирана матрица с елементи: $c_{k_2,l_1} = a_{k_2,l_1}, c_{k_2,l_2} = a_{k_2,l_2}, c_{k_2,l_3} = a_{k_2,l_3}, c_{k_2,l_4} = a_{k_2,l_4}, c_{k_2,l_5} = a_{k_2,l_5}, c_{k_2,l_6} = a_{k_2,l_6}$.

Също така с

$$D = [K_3, L, \{d_{k_1,l_j}\}]$$

означаваме индексирана матрица с елементи: $d_{k_3,l_1} = a_{k_3,l_1}, d_{k_3,l_2} = a_{k_3,l_2}, d_{k_3,l_3} = a_{k_3,l_3}, d_{k_3,l_4} = a_{k_3,l_4}, d_{k_3,l_5} = a_{k_3,l_5}, d_{k_3,l_6} = a_{k_3,l_6}$.

С

$$E = [K_4, L, \{e_{k_1,l_j}\}]$$

означаваме индексирана матрица с елементи: $e_{k_4,l_1} = a_{k_4,l_1}, e_{k_4,l_2} = a_{k_4,l_2}, e_{k_4,l_3} = a_{k_4,l_3}, e_{k_4,l_4} = a_{k_4,l_4}, e_{k_4,l_5} = a_{k_4,l_5}, e_{k_4,l_6} = a_{k_4,l_6}$.

Аналогично с

$$F = [K_5, L, \{f_{k_1,l_j}\}]$$

означаваме индексирана матрица с елементи: $f_{k_5,l_1} = a_{k_5,l_1}, f_{k_5,l_2} = a_{k_5,l_2}, f_{k_5,l_3} = a_{k_5,l_3}, f_{k_5,l_4} = a_{k_5,l_4}, f_{k_5,l_5} = a_{k_5,l_5}, f_{k_5,l_6} = a_{k_5,l_6}$.

Също така с

$$G = [K_6, L, \{g_{k_1,l_j}\}]$$

означаваме индексирана матрица с елементи: $g_{k_6,l_1} = a_{k_6,l_1}, g_{k_6,l_2} = a_{k_6,l_2}, g_{k_6,l_3} = a_{k_6,l_3}, g_{k_6,l_4} = a_{k_6,l_4}, g_{k_6,l_5} = a_{k_6,l_5}, g_{k_6,l_6} = a_{k_6,l_6}$.

Нека на стойностите, които съответстат на ИМ B, C, D, E, F и G съпоставим стойностите на 6 на брой едномерни масива:

1) array2[6] = { 1, 1, 1, 1, 1, 1 };

2) array3[6] = { 0, 1, 1, 1, 1, 1 };

3) array4[6] = { 0, 0, 1, 1, 1, 1 };

4) array5[6] = { 0, 0, 0, 1, 1, 1 };

5) array6[6] = { 0, 0, 0, 0, 1, 1 };

6) array7[6] = { 0, 0, 0, 0 , 0, 1 };

След това програмно ще се зададат логически стойности от съответните изводи, например на извод l_1 от множеството L на индексираната матрица A отговаря променлива led. На нея се присвоява дигитален пин на Arduino контролера номер 2 и с функцията digitalWrite(led, HIGH) се задава логическа "1", т.е. стойността на led става равна на 1 или логическа "0" и стойността на led става равна на 0. след това логическите стойности се записват в променлива, например на дигитален пин задаваме стойности записани в масив array2, тогава с прочитане на стойностите на масивите за всички изводи се извеждат с функцията: Serial.print().

Описание с ИМ на случайни процеси

Случаен процес с дискретно време. Марковска верига.

Случаен процес с дискретно време наричаме редица от случайни величини $\xi_0, \xi_1, \ldots$. Ще предполагаме, че всички $\xi_0, \xi_1, \ldots$ са дискретни със стойности неотрицателни цели числа.

Ако $\xi_n = i$, ще казваме, че процесът е в състояние i в момента n.

Вероятността

$$P(\xi_n = j | \xi_{n-1} = i)$$

наричаме вероятност на преход от i към j в момента n.

Ако вероятностите за преход не зависят от момента от време, казваме, че процесът е стационарен.

Процесът $\xi_0, \xi_1 \ldots$ наричаме марковска верига, ако за произволно цяло число n $>$ 0 и състояния $j_0, \ldots, j_n$ е изпълнено

$$P(\xi_n = j_n | \xi_{n-1} = j_{n-1}, \xi_{n-2} = j_{n-2}, \ldots, \xi_0 = j_0) = P(\xi_n = j_n | \xi_{n-1} = j_{n-1}).$$

Предполагаме, че случайните величини $\xi_0, \xi_1, \ldots$ могат да приемат за стойности произволни положителни цели числа. Затова ще работим с безкрайни вектори и матрици. Поради нормираността и неотрицателността на вероятностната мярка, обаче, работата с тези вектори и матрици няма да ни създава проблеми. С V ще означаваме линейното пространство от редици от положителни цели числа, а с $V \times V$ пространството от безкрайни матрици от положителни цели числа. Ще разгледаме само еднородни марковски вериги, за които са зададени вектор от начални вероятности $B = (b_0, b_1, \ldots) \in V$ и матрица на преходите

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & a_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & a_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

така че са изпълнени

$$P(\xi_0 = i) = b_i$$

и

$$P(\xi_1 = j | \xi_0 = i) = p_{ij}$$

за произволни състояния i и j.

Чрез апарата на ИМ моделът може да бъде представен по следния начин.

Нека означим множеството на случайните величини $\xi_0, \xi_1, \ldots$ в определен момент; с индексното множество $K = k_1, k_2, \ldots, k_m$ на началните състояния на процес или обект и тъй като всеки от тях може да има начално и крайно състояние, то тогава може да означим с индексното множество $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ крайните състояния на процес или обект.

Тогава може да съставим индексирана матрица на преходите

$$A = \begin{array}{c|cccc} & l_1 & l_2 & \ldots & l_n \\ \hline k_1 & a_{k_1,l_1} & a_{k_1,l_2} & \ldots & a_{k_1,l_n} \\ k_2 & a_{k_2,l_1} & a_{k_2,l_2} & \ldots & a_{k_2,l_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ k_m & a_{k_m,l_n} & a_{k_m,l_n} & \ldots & a_{k_m,l_n} \end{array},$$

където 1 $\leq$ i $\leq$ m, 1 $\leq$ j $\leq$ n, където елементът a_{k_i,l_j} е вероятността за преход от състояние k_i към l_j в определен момент.

Съставяне карта на знания (map knowldege) посредством пътека от инструкции с ИМ на преходите Нека означим с промяна посоката на една Robocar r_1 = "ляво", r_2 = "дясно", r_3 = "направо" или r_4 = "назад" с индексното множеството $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$, може да съставим и множеството $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ за промяна на състоянието(посоката) като 1 $\leq$ j $\leq$ n и n $\geq$ 3. Тогава може да съставим индексирана матрица на инструкциите

$$A = \begin{array}{c|cccc} & l_1 & l_2 & \ldots & l_n \\ \hline k_1 & a_{k_1,l_1} & a_{k_1,l_2} & \ldots & a_{k_1,l_n} \\ k_2 & a_{k_2,l_1} & a_{k_2,l_2} & \ldots & a_{k_2,l_n} \\ k_3 & a_{k_3,l_1} & a_{k_3,l_2} & \ldots & a_{k_3,l_n} \\ k_4 & a_{k_4,l_n} & a_{k_4,l_n} & \ldots & a_{k_4,l_n} \end{array}$$

като три от елементите a_{k_1,l_j}, a_{k_2,l_j}, a_{k_3,l_j}, a_{k_4,l_j} за всяка колона l_j приема стойност 0 и само един от тях 1, където 1 $\leq$ j $\leq$ n.

Нека се изпълнят всичките n на брой инструкции. Нека са дадени вероятностите v_1, v_2, v_3, v_4. Нека v_1 има вида "Robocar завива наляво", v_2 има вида "Robocar завива надясно",v_3 има вида "Robocar завива напред", v_4 има вида "Robocar завива назад".

Тогава с индексното множество $P = p_1 = l_1, p_2 = l_2, \ldots, p_n = l_n$ означим началните инструкции, които в даден момент са станали начални, а с индексното множество $Q = q_1 = l_2, q_2 = l_3, \ldots, p_{n-2} = l_{n-1}$ крайните инструкции, които в даден момент са станали крайни като първата и последната никога не стават начални. Тогава може съставим индексирана матрица на преходите

$$D = \begin{array}{c|cccc} & q_1 & q_2 & \ldots & q_{n-2} \\ \hline p_1 & d_{k_1,l_1} & d_{k_1,l_2} & \ldots & d_{k_1,l_{n-2}} \\ p_2 & d_{k_2,l_1} & d_{k_2,l_2} & \ldots & d_{k_2,l_{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ p_n & d_{k_n,l_{n-2}} & d_{k_n,l_{n-2}} & \ldots & d_{k_n,l_{n-2}} \end{array},$$

1 $\leq$ r $\leq$ n, 1 leq s $\leq$ n-2, където елементът $d_{p_r,q_s} = v_1 \vee v_2 \vee v_3 \vee v_4$ е вероятността за преход от състояние p_r към q_s в определен момент.

Тогава с подмножеството P_1 ще означим това индексно подмножество на P, чиито индекси p_r изпълняват условието $d_{p_r,q_s} = v_1$. Аналогично с подмножествата P_2, P_3, P_4 ще означим тези индексни подмножества на P, чиито индекси p_r изпълняват съответно условията $d_{p_r,q_s} = v_2$, $d_{p_r,q_s} = v_3$ или $d_{p_r,q_s} = v_4$. Тогава броят на инструкциите за смяна посоката наляво е равна на мощността на подмножеството $|P_1| = |P - P_2 - P_3 - P_4|$ и тогава може да изчислим процента с формулата $|P_1|$ / $|P|$. Тогава може да представим процента с размита двойка. Аналогично може да изчислим процента на инструкциите за смяна посоката за останалите три посоки съответно с $|P_2|$ / $|P|$, $|P_3|$ / $|P|$, $|P_4|$ / $|P|$ и да намерим максималния и минималния процент на четирите посоки, които да използваме за предричане на състояния на Robocar-а в бъдещ момент.

Заключение

В Глава 1 е предоставено и определено условието за решаване на матричните уравнения с известни стойности на индексираните матрици $A = [K, L, a_{k_i,l_j}]$ и $B = [P, Q, b_{p_r,q_s}]$ с елементи реални числа като намереното решение с минимален и максимален брой редове и колони, чиито елементи са реални числа, при операции съответно $\oplus$, $\otimes$, $\ominus$ е индексирана матрица $X = [Y, Z, c_{t_u,v_w}]$. Когато трябва да бъде решено уравнение (1), твърдението, че ако $K - P \neq \emptyset$, т.е. когато $k \in K - P$, тогава $k \in (K \cup Y) - P$, което е невъзможно. Следователно доказахме, че едно от условията за съществуване на решения на (1) е $K \subseteq P$. По аналогия, второто условие ще бъде: $L \subseteq Q$. Намерени са решения на уравнения (1) - (3), където подоперацията $\oplus$ е „+“, „-“, „*“ или „/“. При решаване на матрични уравнения с индексирани матрици с операция събиране и подоперация умножение, проверката на валидността на това решение, когато подоперацията е “×“ допълнителното условие за съществуване на решение е, че за всяко $k_i \in K$ и $l_j \in L$:

$$a_{k_i,l_j} \neq 0$$

. Когато решаваме матрични уравнения с индексирани матрици с операция събиране и подоперация деление допълнителното условие за съществуване на решение е, че за всяко $p_r \in P$ и $q_s \in Q$:

$$b_{p_r,q_s} \neq 0.$$

Също така при решаване на матрично уравнение с индексирани матрици с операция почленно умножение определихме при кои условие уравнението има и няма решение. Ако $P \cap K = 0$ или $Q \cap L = 0$, или ако $K \subset P$, т.е. $K \neq P$ или $L \subset Q$, т.е. $L \neq Q$, тогава уравнението

$$A \otimes_{(\circ)} X = B$$

няма решение. Следователно условието за съществуване на решение на (2) е $P \subseteq K$ и $Q \subseteq L$. В случая, когато решаваме матрично уравнение с операция изваждане, в този случай виждаме, че индексираните матрици A and B трябва да отговарят на условията $P \subseteq K, Q \subseteq L$. Ако $K = P$ или $L = Q$, тогава

$$A \ominus X = B$$

има решението

$$X = [\emptyset, \emptyset, \{*\}],$$

където символът “*“ означава липса на елементи.

Когато $P \subset K$, т.е., $P \neq K$ и $Q \subset L$, i.e., $Q \neq L$, тогава уравнение (3) има решение където за всеки $t_u \in K - P$ and $v_w \in L - Q$, c_{t_u,v_w} са произволни реални числа. За две индексирани матрици $A = [K, L, \{a_{k_i,l_j}\}]$ and $B = [P, Q, \{b_{p_r,q_s}\}]$ с елементи са интуиционистки размити двойки, където

$$a_{k_i,l_j} = \langle \alpha_{k_i,l_j}, \beta_{k_i,l_j} \rangle,$$
$$b_{p_r,q_s} = \langle \gamma_{p_r,q_s}, \delta_{p_r,q_s} \rangle,$$

също е определено условието за решаване на матричните уравнения

и съставена индексирана матрица X с минимален и максимален брой редове и колони в случая, когато елементи са интуиционистки размити двойки. Всяка интуиционистки размита двойка има формата $\langle a, b \rangle$, където $a, b \in [0, 1]$ и $a + b \leq 1$.

Когато трябва да решим матрични уравнения с индексирани матрици с операция изваждане, че индексираните матрици A and B с елементи са интуиционистки размити двойки, трябва да отговарят на условията $P \subseteq K, Q \subseteq L$. Тогава (минималното) решение е

$$X = [K - P, L - Q, \{\langle y_{p_r,q_s}, z_{p_r,q_s} \rangle\}],$$

където елементите на индексираната матрица X са произволни интуиционистки размити двойки. Също така са дефинирани детерминанта и перманента на една индексирана матрица, свойства и техни приложения. В глава 2 е представена индексирана матрица с елементи, които отразяват наличието и липсата на свързаност между отделните функционално-конструктивни модули, от които са конструирани логическите и комбинационни схеми. Идеята е, че с апарата на ИМ, платките може да се оптимизират, направят по-бързи и ефективни чрез намиране на най-малкото и най-голямо разстояние между контактните точки на елементите, от които са съставени логическите схеми и между тях самите.

В глава 3 с индексното множество $K = \{k_1, k_2, ..., k_m\}$ са означени изводите на Ардуино, които са конфигурирани като изходи, а с индексното множеството $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ логическите стойности, които ще се зададат от изводите в определен момент от време. Съставена е индексирана матрица, чиито елементи са логическите стойности, които се задават от всеки извод.

Приноси в дисертационния труд

Научни приноси в дисертационния труд

1. Решаване на матрични уравнения с индексирани матрици, чиито елементи са реални числа и интуиционистки размити двойки, изследване свойствата на детерминанта и перманента на индексирана матрица.

Научно-приложни приноси

1. Представяне на блок-диаграма в комбинаторния смисъл на това понятие и елементи на аналитичната геометрия в равнината с индексирана матрица.

2. Представяне с индексирана матрица на ФКМ, монтажни места на функционално-конструктивни модули, разстояния между заетите монтажни места.

3. С агрегация с минимална, максимална стойност и сума по редове и колони са намерени минимални, максимални разстояния; суми от разстояния между монтажни места на индексирана матрица на разстоянията.

4. Съставена е индексирана матрица, чиито елементи са логическите стойности, които се задават от всеки извод.

5. Съставяне карта на знания(map-knowledge) посредством пътека от инструкции с индексирана матрица на преходите.

Приложни приноси

1. Създаване на програма, с която от 6 на брой изводи на Ардуино контролер, конфигурирани като изходи, се задават 6 на брой логически стойности.

2. Изчисляване на агрегирани стойности по редове и колони на индексирани матрици с Ексел.

Публикации по дисертационния труд

1*. Todorova S., Bureva V., and Angelova N. On the solutions of some equations with index matrices. Proc. Jangjeon Math. Soc. Vol. 26 (2023), No. 3, 2023.

    $http://jangjeonopen.or.kr/PJMS/open_{a}ccess_{v}iew.php?year = 2023\&volume = 26\&number = 3$

2*. Todorova S. On the solutions of some equations with intuitionistic fuzzy index matrices. Uncertainty and Imprecision in Decision Making and Decision Support – New Advances, Challenges, and Perspectives - Selected papers from BOS/SOR-2022, held on October 13-15, 2022, and IWIFSGN-2022, held on October 13-14, 2022, in Warsaw, Poland. Springer Nature Switzerland AG. Vol. 26, No. 3, 2023

3. Тодорова С. Обзор върху публикациите по индексирани матрици. Годишник на секция "Информатика". Съюз на учените в България. Том XII. 2022-2023. 32-62.

    $http://old.usb-bg.org/Bg/CV_{I}nformatika.htm$

4. Todorova S., Proykov M. Mathematical analysis of an electrical circuit. International Scientific Industry 4.0. Том 6. Брой 1. стр. 25 – стр. 26. 2021.

    $http://stumejournals.com/journals/i4/2021/1/25$

5. Todorova S., Proykov M. Recycle rechargeable lithium-ion batteries. Trans Motauto World Journal section: TRANSPORT TECHNICS. INVESTIGATION OF ELEMENTS. RELIABILITY. Том 6. Брой 1. стр. 9 – 10. 2021.

    $http://stumejournals.com/journals/tm/2021/1/9$